

Marco Forti[☆] e Furio Honsell^{☆☆}

Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

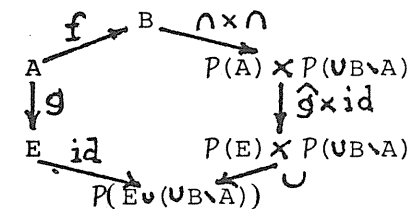
0. Introduzione

Scott [6], Hajek [5], Boffa [1] e [2] ed altri hanno considerato assiomi contraddicenti l'assioma di fondazione, che oltre ad un interesse filosofico-fondazionale hanno interessanti applicazioni (e.g. classificazione di formule, isomorfismi elementari di V , modelli naturali del λ -calcolo).

Nella teoria ingenua degli insiemi si presenta naturalmente un "principio di libera costruzione" che asserisce, in sostanza, la possibilità di costruire un insieme E i cui elementi intersecano E ed il suo complementare in sottoinsiemi assegnati a priori (attraverso una codifica).

Nelle tradizionali assiomatizzazioni questo principio viene fortemente limitato, in particolare assumendo l'assioma di fondazione. Noi abbiamo formalizzato il principio nel modo seguente [4]

Υ : data una funzione $f:A \rightarrow B$ esiste una funzione $g:A \rightarrow E$ che rende commutativo il diagramma



Risulta che tutti gli assiomi finora considerati in alternativa alla fondazione sono ottenibili aggiungendo

☆ Ist. di Matematica "L. Tonelli" - Università di Pisa

☆☆ Scuola Normale Superiore - Pisa

particolari condizioni all'assioma Υ . Noi abbiamo considerato ([3],[4]) varie formulazioni di questo assioma, due delle quali rappresentano le due possibili estensioni massimali del teorema d'isomorfismo di Mostowski.

1. Definizioni e preliminari

Si consideri una funzione $f:A \rightarrow B$.

Def.1 Una funzione $g:A \rightarrow E$ si dice *f-induttiva* (risp.

f-costruttiva) se $\forall x \in A$ si ha

$$g(x) = \hat{g}(f(x) \cap A) \quad (\text{risp. } g(x) = \hat{g}(f(x) \cap A) \cup (f(x) \setminus A))$$

Consideriamo allora i seguenti assiomi

X (risp. Y) : per ogni f esiste g *f-induttiva* (risp. *f-costruttiva*)

X_1 (risp. Y_1) : per ogni f esiste un'unica g *f-induttiva* (risp. *f-costruttiva*)

X_i (risp. Y_i) : per ogni f iniettiva esiste g *f-induttiva ed iniettiva* (risp. *f-costruttiva*)

si noti che X_1 corrisponde all'esistenza e Y_1 all'unicità dell'isomorfismo di Mostowski per relazioni arbitrarie.

Def.2 $C \subseteq A$ si dice *f-transitivo* se $x \in C$ implica $f(x) \cap A \subseteq C$

$C \subseteq A$ si dice *f-saturato* se $f(x) \cap A \subseteq C$ implica $x \in C$

$x \in A$ si dice *f-fondato* se appartiene ad ogni *f-saturato*

Ovviamente se C è *f-transitivo* e g è *f-costruttiva* $g|_C$ è *f|_C-costruttiva*. Non è però necessario rafforzare gli assiomi enunciati con una proprietà di estendibilità, in quanto

Lemma 1 Y è equivalente alle seguenti due asserzioni:

Y^* : $\forall f$ e $\forall C$ *f-transitivo* ogni h *f|_C-costruttiva* si estende a g *f-costruttiva*

X^t : se f induce l'identità su T *transitivo*, allora esiste g *f-induttiva* che induce l'identità su T .

Lemma 2 Sia A_f l'insieme degli elementi *f-fondati* di A . Allora esiste un'unica funzione $f|_{A_f}$ -costruttiva.

Ne segue, in particolare, che Y_i è inconsistente; nelle considerazioni seguenti verrà sostituito con X_i^t , che invece è consistente e, per il Lemma 1, possiede la forza voluta.

2. Il metodo delle relazioni f-ammissibili

Esponiamo qui una tecnica di costruzione di modelli interni della teoria degli insiemi, che generalizza quello delle permutazioni dell'universo; essa è alla base delle prove del paragrafo successivo.

Nel seguito si consideri fissata $f:A \rightarrow P(A)$.

Sia $E(A)$ l'insieme delle equivalenze su A .

Per $R \in E(A)$ sia \tilde{R} definita da $x \tilde{R} y$ sse

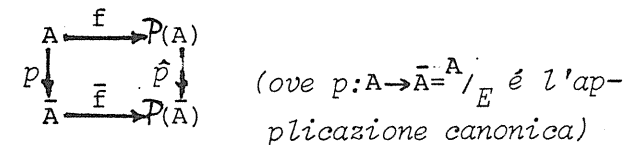
$$\forall s \in f(x) \exists t \in f(y) s R t \text{ e } \forall t \in f(y) \exists s \in f(x) t R s$$

Def.3 R si dice *f-compatibile* (risp. *f-conservativa*, *f-ammissibile*) se $\tilde{R} \subseteq R$ (risp. $\tilde{R} \supseteq R, \tilde{R} = R$).

Lemma 3 $\tilde{}$ è un operatore monotono sul reticolo completo $E(A)$. Quindi le equivalenze *f-ammissibili* sono un reticolo completo dotato di $\min \equiv_f$ e $\max \approx_f$.

Poiché R è *f-ammissibile* se e solo se ogni sua restrizione ad insiemi *f-transitivi* lo è, è possibile estendere definizioni ed il Lemma 3 al caso in cui A sia una classe propria.

Teorema 1 Se E è un'equivalenza *f-ammissibile* esiste una unica \bar{f} t. c. il diagramma



commuti. Inoltre \bar{f} è iniettiva.

Teorema 2 Se \bar{f} è surgettiva si ottiene un modello A di

ABC ponendo: $\text{Classi}^A = \text{sottoinsiemi di } \bar{A}$
 $\text{Insiemi}^A = \text{elementi di } \bar{A}$
 $x \in y$ sse $y \in \bar{A}$ ed $x \in \bar{f}(y)$ ovvero $y \notin \bar{A}, y \subseteq \bar{A}, x \in y$.

Teorema 3 Ogni funzione f -induttiva induce un'equivalenza f -ammissibile. Viceversa vale

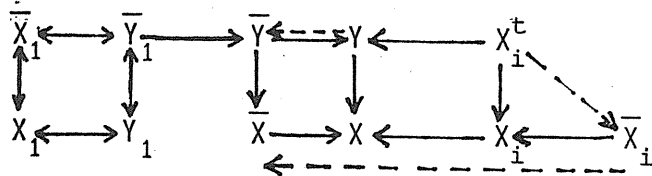
- X_1 sse l'unica relazione f -ammissibile indotta è \approx_f
- X_i sse ogni relazione f -ammissibile è indotta;
- X sse \approx_f è indotta.

3. Il teorema principale

Ponendoci nella teoria di Gödel-Bernays è possibile formulare gli assiomi precedenti per classi: ci riferiremo a tali generalizzazioni sovrapponendo una barra al nome del corrispondente assioma.

I principali risultati di [3] e [4] sono riassunti nel teorema seguente ove con ABC si indicano i gruppi di assiomi della teoria di Gödel-Bernays (cfr. [2]) e N è l'assioma di von Neumann $V \simeq \text{Ord}$.

TEOREMA In ABCN valgono le implicazioni del seguente diagramma



Nessuna freccia si può invertire e solo le composizioni si possono aggiungere: in particolare tutti gli assiomi sono consistenti relativamente ad ABCN. Le frecce a tratto intero valgono già in ABC.

Nota : Dalla dimostrazione segue che restringendosi al linguaggio di ZF si ottengono teorie che sono tutte estensioni essenziali l'una dell'altra.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Boffa M. - Forcing et négation de l'axiome de fondement. Mem. Acad. Royale Belg. (1972)
- [2] Boffa M. - Sur la théorie des ensembles sans axiome de fondement. (1969) Boll. Soc. Math. Belg. 21, 16-56
- [3] Forti M. - Honsell F. - Comparison of the Axioms of local and global Universality. (in corso di pubblicazione)
- [4] Forti M. - Honsell F. - Set Theory with Free Construction Principles. (in corso di pubblicazione)
- [5] Hajek P. - Modelle der Mengenlehre, in denen Mengen gegebener Gestalt existieren. (1965) - Zeitschr. math. Log. Grundle. Math. 11, 103-115
- [6] Lévy A. - A Hierarchy of Formulas in Set Theory. Memoir. Amer. Math. Soc. 57 (1965)