Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

LOGICA E FISICA

M.L. DALLA CHIARA, G.TORALDO di FRANCIA

In una introduzione alla discussione su "logica e fisica" è opportuno isolare alcuni problemi intorno ai quali è avvenuta una interazione interessante fra il lavoro dei logici e quello dei fisici. Ci pare che valga la pena individuare almeno i seguenti temi: il ruolo dell'induzione e della deduzione in fisica; analisi semantiche delle teorie fisiche; autoriferimenti nella meccanica quantistica.

1. Induzione e deduzione in fisica

Secondo una tesi filosofica che ha avuto molta fortuna, la fisica sarebbe essenzialmente legata a procedimenti logici di tipo induttivo. E' possibile individuare una classe di procedimenti induttivi che i fisici oggi giudichino non solo affidabili, ma anche elementi costitutivi importanti della struttura logica delle teorie fisiche ?

L'induzione tradizionale (chiamata anche "ingenua") può essere schematicamente descritta come fondata sulla seguente regola:

Regola dell'induzione ingenua

$$\frac{\alpha(\underline{c}_1) \wedge \beta(\underline{c}_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(\underline{c}_n) \wedge \beta(\underline{c}_n)}{\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow \beta(\underline{x}))}$$

purchè $\underline{n}$ sia "abbastanza grande" e "non si conosca" un esempio c tale che: $\alpha(\underline{c}) \wedge \neg\beta(\underline{c})$.

E' superfluo ricordare le critiche che sono state mosse (da Hume in poi) contro l'affidabilità razionale di una tale regola, che naturalmente non può far parte della struttura logica delle teorie fisiche. Vale invece la pena discutere l'applicabilità alle teorie fisiche di una versione più raffinata di regola induttiva (che è stata sistematicamente studiata dalla <u>logica induttiva</u>). Si tratta di una classe di regole che possono essere schematizzate così:

<u>Schema di regola induttiva probabilistica</u>

$$\frac{\alpha(\underline{c}_1) \wedge \beta(\underline{c}_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(\underline{c}_n) \wedge \beta(\underline{c}_n)}{p(\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow \beta(\underline{x}))) = \underline{r}}$$

purchè non si conosca un esempio c tale che: $\alpha(\underline{c}) \wedge \neg\beta(\underline{c})$. Ogni esempio particolare di regola calcola il valore di probabilità dell'asserzione universale $\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow \beta(\underline{x}))$ come una funzione "ragionevole" del numero n di <u>esempi positivi</u> trovati sperimentalmente.

E' noto che le regole induttive probabilistiche hanno dato luogo a delle difficoltà logiche ed epistemologiche (<u>paradossi della conferma</u>, ecc.). Tuttavia, anche prescindendo da tali difficoltà, alcune peculiarità della microfisica spingono a concludere che regole di questo tipo non siano affidabili in campo fisico, in quanto danno luogo a dei controesempi.

La ragione fondamentale può essere sintetizzata dalla seguente osservazione: <u>in microfisica gli eventi rari sono frequenti</u>. In altri termini, per quanto grande sia il numero n di esempi positivi trovati, in assenza di esempi negativi, il mondo in cui è vero $\exists \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \wedge \neg\beta(\underline{x}))$ non è meno probabile del mondo in cui è vero $\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow \beta(\underline{x}))$. Pertanto le asserzioni probabilistiche di cui di solito si interessa il fisico non sono del tipo $p(\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow \beta(\underline{x}))) = \underline{r}$, ma piuttosto del tipo $\forall \underline{x}(\alpha(\underline{x}) \rightarrow p(\beta(\underline{x})) = \underline{r})$.

Dobbiamo concludere che la fisica ha rinunciato a qualunque procedimento induttivo ? In realtà esiste una forma di induzione che ha tutte le caratteristiche di una premessa necessaria per il lavoro del fisico: si tratta del postulato dell'<u>invarianza spazio-temporale delle leggi fisiche</u>, che garantisce - fra l'altro - la legittimità dell'uso di esperimenti <u>unici</u>.

Per quanto riguarda il ruolo della deduzione, l'opportunità di descrivere il corpo delle teorie fisiche come un insieme di sistemi ipotetico-deduttivi è fuori discussione. Un problema interessante (sul quale esiste oggi una vasta letteratura) è il seguente: esistono delle caratteristiche logiche peculiari delle teorie fisiche ? In particolare una semantica adeguata per la fisica è descrivibile come una sottoteoria della teoria standard dei modelli o piuttosto invece come una sua generalizzazione ? Il problema è quello di evitare il pericolo di dare delle immagini formali eccessivamente idealizzate rispetto alle teorie fisiche reali.

Tutti sanno che le teorie fisiche hanno essenzialmente a che fare con il concetto di *approssimazione*. Questo ha portato vari studiosi ad asserire che la fisica può raggiungere solo delle verità *approssimate*, mentre il *progresso* delle teorie fisiche può, in un certo senso, essere inteso come un "andare verso approssimazioni sempre migliori" (o se si vuole verso "verità sempre meno approssimate" e quindi verso teorie "sempre più vere").

In realtà, quest'immagine della fisica risulta insoddisfacente per vari motivi logici e filosofici, e risulta anche inadeguata rispetto alla prassi scientifica concreta, nella quale non si riesce fra l'altro a realizzare in che cosa potrebbe consistere una sorta di *verità-limite*, a cui le diverse verità approssimate dovrebbero tendere.

Più fecondo di sviluppi, sembra invece uno spostamento di angolatura, che rinunci a classificare come "verità approssimate" le verità delle scienze empiriche. Tecnicamente, tutto questo si può realizzare, nel caso delle teorie fisiche, assumendo come punto di partenza semantico una teoria empirica dei modelli (che rappresenta un ampliamento della teoria standard dei modelli). In questo contesto risulta possibile definire un concetto di *verità fisica* e di

modello per una teoria fisica che tiene conto delle *precisioni* degli strumenti (e quindi incorpora nella metateoria semantica tutta la questione delle approssimazioni). Su questa base si ha che ogni teoria fisica storicamente accettata risulta *vera* rispetto ad un certo dominio di fenomeni (i fenomeni per cui si dice anche che essa fornisce una *spiegazione*). Nello stesso tempo il progresso che porta da una teoria T_1 ad un'altra teoria T_2 (intuitivamente "migliore") si lascia formalmente descrivere come un passaggio da una T_1 con dominio meno ampio ad una T_2 con dominio più ampio. In questo quadro semantico, si riesce anche a capire come sia possibile che due teorie "rivali" (sintatticamente incompatibili) possano *spiegare* entrambe lo stesso dominio di fenomeni senza dar luogo a incoerenze.

2. Semantica empirica e semantica ideale

Il concetto fondamentale della semantica empirica è quello di *modello fisico* (che costituisce una generalizzazione rispetto all'usuale concetto di *modello*).

Sia $\underline{T}$ una generica teoria fisica ed $\underline{L}$ il suo linguaggio

Def.1. *Modello fisico*

Un possibile modello fisico per $\underline{T}$ è una struttura $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_o, \underline{S}, \underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_n, \rho \rangle$ dove

a) $\mathcal{M}_o$ rappresenta la <u>parte matematica</u> di $\mathcal{M}$ (identificata con un modello - nel senso usuale - della sottoteoria matematica di $\underline{T}$;

b) $\langle \underline{S}, \underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_n \rangle$ rappresenta la <u>parte operativa</u> di $\mathcal{M}$ costituita da:

b1) un insieme $\underline{S}$ di <u>situazioni fisiche</u> (intese come insiemi di <u>sistemi fisici</u> in <u>stati</u> determinati);

b2) da una successione $\underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_n$ di <u>grandezze fisiche definite operativamente</u>. Ogni grandezza $\underline{Q}_i$ si intende identificata con la sua <u>definizione operativa</u> (caratterizzabile astrattamente come una classe di procedimenti), ed è associata ad un dominio di applicabilità $\underline{S}_i$ ($\subseteq \underline{S}$) e ad una <u>precisione</u> ε_i. Se $\underline{s} \in \underline{S}_i$ resta determinato il <u>risultato</u> $\underline{Q}_i(\underline{s})$ della misurazione di $\underline{Q}_i$ in $\underline{s}$ e l'insieme degli enti matematici $\underline{V}_i(\underline{s})$ che rappresentano i <u>possibili valori ideali</u> per $\underline{Q}_i$ in $\underline{s}$ (per esempio nei casi più semplici $\underline{Q}_i(\underline{s})$ è di solito un intervallo di numeri reali di lunghezza ε_i, e ogni elemento di $\underline{Q}_i(\underline{s})$ rappresenta un possibile valore ideale per la grandezza $\underline{Q}_i$ nella situazione $\underline{s}$;

c) ρ è una funzione di traduzione che connette la parte operativa con la parte matematica di $\mathcal{M}$ (ed associa una interpretazione matematica in $\mathcal{M}_o$ ai termini della parte operativa di $\mathcal{M}$).

Per ogni grandezza $\underline{Q}_i$ il linguaggio $\underline{L}$ di $\underline{T}$ contiene una successione di <u>variabili fisiche</u> $\underline{q}_{i_1}, \ldots, \underline{q}_{i_n}, \ldots$ (che variano su tutti i possibili valori ideali della grandezza $\underline{Q}_i$).

La nozione di verità di una formula di $\underline{L}$ in $\mathcal{M}$ si definisce nel modo seguente:

Def.2. <u>Verità fisica</u>

Sia $\alpha(\underline{\tilde{q}}_i)$ una formula di $\underline{L}$ contenente una successione $\underline{\tilde{q}}_i$ di variabili fisiche;

$\models_{\mathcal{M}} \alpha(\underline{q}_i)$ (α è vera in $\mathcal{M}$) se

a) α <u>è definita</u> rispetto ad almeno una $\underline{s} \in \underline{S}$ (ossia esiste una $\underline{s} \in \underline{S}$ t.c. : per ogni $\underline{q}_i$ occorrente in α, $\underline{s}$ cade nel dominio di applicabilità $\underline{S}_i$ di $\underline{Q}_i$);

b) per ogni $\underline{s} \in \underline{S}$, se α è definita rispetto a $\underline{s}$ allora per ogni $\underline{q}_i$ occorrente in α esiste un valore ideale $\underline{v}_i \in \underline{V}_i(\underline{s})$ t.c.: $\models_{\mathcal{M}_o} \alpha\left[\frac{\underline{\tilde{x}}_i}{\underline{\tilde{v}}_i}\right]$

La nozione di modello fisico si definisce in modo ovvio.

E' evidente che la Def.2 riconduce la nozione di verità fisica ad un caso particolare di <u>soddisfacibilità matematica</u>. Nessuna sorpresa pertanto se si incontrano apparenti violazioni del principio semantico di non contraddizione: α e $\neg\alpha$ possono essere simultaneamente vere in $\mathcal{M}$. Pertanto due teorie rivali T_1 e T_2 possono risultare entrambe vere rispetto ad uno stesso dominio di fenomeni anche se la loro congiunzione $\underline{T}_1 + \underline{T}_2$ è una teoria contraddittoria.

In molti casi concreti (per esempio quando si fa della fisica matematica) è significativo analizzare le teorie fisiche attraverso una <u>semantica ideale</u>, che trascura la parte operativa dei modelli fisici ed agisce direttamente nella interpretazione matematica. Per esempio, se $\underline{T}$ rappresenta la meccanica classica (MC) oppure la meccanica quantistica (MQ) ed $\mathcal{M}$ è un modello fisico di $\underline{T}$, la funzione ρ associa come interpretazione matematica in $\mathcal{M}_o$ ad ogni sistema fisico σ in $\underline{S}$ uno spazio astratto $\rho(\sigma)$ e ad ogni stato (operativo) $\underline{o}$ di σ un <u>punto</u> $\rho(o)$ in tale spazio: $\rho(\underline{o})$ rappresenta intuitivamente un possibile stato ideale del sistema σ. In tale contesto risulta molto naturale introdurre una semantica di tipo kripkiano, che risulta avere un interessante significato fisico. Nei casi più semplici, i modelli kripkiani (<u>modelli fisici ideali</u>) hanno la forma seguente:

$$\mathcal{M} = \langle \underline{I}, \underline{R}, \models \rangle \qquad \text{dove}$$

$\underline{I}$ (l'insieme dei <u>mondi possibili</u>) è l'insieme dei possibili stati ideali di un sistema fisico σ, $\underline{R}$ è la relazione di <u>accessibilità</u> fra mondi possibili, $\models$ è la relazione di verità che può sussistere fra stati ideali e formule di un opportuno sottolinguaggio di $\underline{T}$: $\models_{\underline{i}} \alpha$ rappresenta pretanto una nozione di "verità

fisica ideale".

Nel caso di MC e MQ, è molto naturale caratterizzare la relazione di accessibilità $\underline{R}$ in modo che abbia il seguente significato fisico: $\underline{R}$ sussiste fra due stati ideali $\underline{i}$ e $\underline{j}$ sse $\underline{j}$ è uno stato in cui si può trasformare $\underline{i}$ in seguito ad una misurazione relativa ad una grandezza. Risulta che una tale $\underline{R}$ è riflessiva e simmetrica ma in generale non transitiva.

La classe dei modelli kripkiani con relazione di accessibilità riflessiva e simmetrica determina naturalmente una classe di logiche (che per ovvi motivi possiamo chiamare <u>logiche della similitudine</u>), di cui la <u>logica quantistica</u> è un caso particolare. Può essere interessante confrontare tali logiche con le logiche non classiche più familiari, che sono sopralogiche della logica positiva e sono caratterizzabili kripkianamente da classi di modelli con relazione di accessibilità almeno riflessiva e transitiva (intuitivamente, com'è noto, queste logiche possono essere interpretate come logiche di tipo <u>epistemico</u>). Rispetto alle logiche epistemiche, le logiche della similitudine presentano alcune interessanti <u>anomalie metalogiche</u>. Per esemio, è ben noto che nella logica dei predicati (classica) è possibile distinguere le seguenti nozioni semantiche:

1) <u>Verificabilità di una formula</u> (Verif α sse α ha un modello):

1') <u>Realizzabilità di una formula</u> (Real α sse esiste modello in cui α è soddisfacibile);

2) <u>Conseguenza logica forte</u> ($\alpha \models\!\!\!\equiv \beta$ sse in ogni modello ogni interpretazione delle variabili che soddisfi α soddisfa anche β);

2') <u>Conseguenza logica debole</u> ($\alpha \models \beta$ sse ogni modello di α è modello di β).

E' noto che vale: Verif $\alpha \Rightarrow$ Real α, ma in generale non viceversa ($\alpha \models\!\!\!\equiv \beta \Rightarrow \alpha \models \beta$, ma in generale non viceversa).

Analogamente in una qualunque logica enunciativa, caratterizzabile kripkianamente, ha senso definire le seguenti coppie di concetti semantici:

1) Verif α sse esiste un modello $\mathcal{M}$ t.c. per ogni mondo $\underline{i}$ di $\mathcal{M}$: $\models_{\underline{i}} \alpha$;

1') Real α sse esiste un modello $\mathcal{M}$ ed un mondo $\underline{i}$ di t.c.: $\models_{\underline{i}} \alpha$;

2) $\alpha \models\!\!\!\equiv \beta$ sse per ogni $\mathcal{M}$ e ogni $\underline{i}$: $\models_{\underline{i}} \alpha \Rightarrow \models_{\underline{i}} \beta$;

2') $\alpha \models \beta$ sse per ogni $\mathcal{M}$: per ogni $\underline{i}$, $\models_{\underline{i}} \alpha \Rightarrow$ per ogni $\underline{i}$, $\models_{\underline{i}} \beta$.

Mentre nelle logiche epistemiche note vale: Verif α sse Real α ($\alpha \models\!\!\!\equiv \beta$ sse $\alpha \models \beta$), nelle logiche della similitudine in generale vale solo: Verif $\alpha \Rightarrow$ Real α ($\alpha \models\!\!\!\equiv \beta \Rightarrow \alpha \models \beta$).

Da un punto di vista intuitivo, può essere interessante sottolineare come anche il concetto di <u>verità fisica ideale</u> sembri presentare alcune profonde connessioni con il concetto classico di soddisfacibilità.

3. Autoriferimenti in MQ

Uno dei problemi più spinosi della MQ, il cosiddetto <u>paradosso della misurazione</u> si lascia descrivere da un punto di vista logico, come una tipica questione di autoriferimento. Sia $\underline{T}$ la MQ, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_{o}, \underline{S}, \underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_n, \rho \rangle$ un modello fisico di $\underline{T}$, σ un sistema fisico in $\underline{S}$. Se $\underline{A}$ è un apparecchio attraverso cui è possibile fare delle misurazioni su σ relative ad una grandezza $\underline{Q}_i$, sorge naturalmente la domanda: $\underline{A}$ può appartenere a $\underline{S}$? In altri termini, gli apparecchi che, in prima istanza, rappresentano <u>oggetti metateorici</u> possono essere elementi dell'universo del discorso di $\underline{T}$? Poichè $\underline{A}$ è descrivibile come un particolare sistema di particelle, da un punto di vista fisico la risposta più naturale sembra essere quella positiva.

Se $\underline{A} \in \underline{S}$, per gli assiomi della MQ, anche il sistema composto $\sigma + \underline{A} \in \underline{S}$, ed ogni suo stato operativo (in un dato tempo $\underline{t}$) sarà rappresentato matematicamente da un punto $\psi(\underline{t})$ nello spazio astratto $\rho(\sigma + \underline{A})$ che è l'interpretazione matematica di $\sigma + \underline{A}$. Supponiamo ora di eseguire nell'intervallo di tempo $[\underline{t}_o, \underline{t}]$ una misurazione su σ relativa alla grandezza $\underline{Q}_i$, usando l'apparecchio $\underline{A}$. Se $\psi(\underline{t}_o)$ rappresenta lo stato ideale associato a $\sigma + \underline{A}$ nel tempo $\underline{t}_o$, come evolve $\psi(\underline{t}_o)$ nel tempo $[\underline{t}_o, \underline{t}]$?

Il paradosso della misurazione sorge in quanto la MQ fa due previsioni diverse relative a $\psi(\underline{t})$, a se conda che si usi l'assioma di Schrödinger (AS) o l'assioma di proiezione (AP) di von Neumann. Gli assiomi AS e AP sembrano dunque incompatibili e la teoria $\underline{T}$ (che li contiene entrambi) contraddittoria. Mentre AS descrive l'evoluzione temporale degli stati ideali di qualunque sistema fisico σ (indipendentemente dal fatto che vengono o non vengano eseguite misurazioni su σ), AP descrive la trasformazione degli stati ideali di σ indotte da misurazioni. Schematicamente, il contenuto di AP può essere così riassunto: se $\psi(\underline{t}_o)$ rappresenta lo stato ideale di un sistema fisico σ nel tempo $\underline{t}_o$ e nel tempo $[\underline{t}_o,\underline{t}]$ viene eseguita una misurazione su σ, tramite un apparecchio $\underline{A}$, relativamente ad una grandezza $\underline{Q}$, e tale misurazione dà come risultato $\underline{r}$, allora nel tempo $\underline{t}$ il sistema σ viene rappresentato da uno stato ideale $\psi(\underline{t})$ che "con certezza" (ossia con valore di probabilità 1) ha $\underline{r}$ come valore per la grandezza $\underline{Q}$. Intuitivamente, AP sancisce il seguente principio del tutto naturale: se misurando ho ottenuto una certa informazione, dopo la misurazione rappresenterò il sistema fisico di cui mi occupo attraverso uno stato ideale che tiene conto della informazione ottenuta. Nel caso del sistema particolare $\sigma + \underline{A}$, la contraddizione sorge perchè è naturale pensare $\sigma + \underline{A}$ come un sistema che evolve contemporaneamente secondo AS e secondo AP (visto che nel tempo $[\underline{t}_o,\underline{t}]$ avviene fisicamente l'in-

terazione fra sistema-oggetto σ e apparecchio $\underline{A}$).

La soluzione al paradosso della misurazione proposta da von Neumann (e giudicata da molti studiosi filosoficamente inaccettabile per il suo carattere soggettivistico), ammette una lettura puramente logica, che risulta assai naturale e "neutra" da un punto di vista filosofico.

Quando si applica AP usando un apparecchio $\underline{A}$, $\underline{A}$ deve essere un oggetto metateorico; nulla vieta di pensare anche $\underline{A}$ come un elemento di $\underline{S}$, e di considerare come sistema-oggetto il sistema composto $\sigma+\underline{A}$; se allora applichiamo AP al sistema composto $\sigma+\underline{A}$ dobbiamo usare un apparecchio $\underline{A}'$ diverso da $\underline{A}$, e così via. Otteniamo così un regresso all'infinito, che ci permette di collocare dove vogliamo la linea divisoria fra oggetti fisici teorici ($\in \underline{S}$) e oggetti fisici metateorici:

$$\sigma/\underline{A}$$

$$\sigma + \underline{A}/\underline{A}'$$

$$(\sigma + \underline{A}) + \underline{A}'/\underline{A}''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

E' superfluo osservare come questa situazione ricordi ben note situazioni logiche di tipo limitativo. Naturalmente da un punto di vista fisico risulta abbastanza impegnativa la limitazione per cui la catena infinita delle metateorie della MQ non può essere interrotta non solo nella parte matematica (teoremi limitativi della logica) ma anche nella parte fisica (descrizione di particolari oggetti fisici).