

Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28
aprile 1984.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

PRIMI RISULTATI SULLA LOGICA MODALE PREDICATIVA DELLA
DIMOSTRABILITA'.

Franco Montagna

Mentre la logica modale proposizionale della dimostrabilità è stata studiata a fondo da molti autori, soltanto di recente è stato affrontato lo studio della logica modale predicativa della dimostrabilità, cioè lo studio di quelle proprietà del predicato di dimostrabilità per teorie r.e. che estendono PA, che sono esprimibili in un linguaggio modale con quantificatori. A questo proposito è stato proposto in [2] e affrontato in [1] lo studio della versione predicativa QGL della logica modale proposizionale GL. QGL ha, oltre agli assiomi della minima logica modale normale predicativa, lo schema di assiomi $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$. In [2] si osserva che QGL ammette interpretazioni aritmetiche definibili in modo del tutto naturale, e che ogni interpretazione di un teorema di QGL dà luogo a un teorema di PA (Ciò si esprime dicendo che QGL è PA-valido). Tuttavia, la situazione predicativa è estremamente più complicata di quella proposizionale; ad esempio, in [1], A. Avron dimostra che la più naturale formulazione di QGL in un calcolo di sequenti non ha eliminazione del taglio (a differenza di GL). In [1], Avron chiede se QGL sia PA completo, cioè se

ogni formula PA valida di QGL sia un teorema di QGL. In [3], il problema suddetto è risolto in modo negativo; l'autore dimostra anche che, a differenza del caso proposizionale, la nozione di T-validità per estensioni T r.e. Σ_1 valide di PA, dipende da T (Ciò è dovuto al fatto che il linguaggio di QGL è abbastanza potente da catturare parte del contenuto matematico di T).

Un altro problema importante affrontato in [3], è quello dei punti fissi: come è noto (Vedi ad esempio [4]) per ogni formula A_p di GL con p sotto l'azione di \Box , esiste una formula B di GL tale che $\vdash_{GL} B \leftrightarrow A(B)$ (Tale B è unica a meno di dimostrabile equivalenza). questo risultato costituisce una interessante traduzione modale del Lemma di Diagonalizzazione. Sfortunatamente, però, esso non può essere esteso a QGL: infatti non esiste alcuna formula B di QGL tale che $\vdash_{QGL} B \leftrightarrow \forall u \exists v \Box (B \rightarrow P(u,v))$ dove P è un simbolo predicativo binario qualunque). Si possono invece dimostrare i seguenti risultati di unicità:

1) I punti fissi per formule $A(p)$ di QGL con p sotto l'azione di \Box , se esistono, sono unici a meno di dimostrabile equivalenza.

2) Un risultato analogo vale per PA (con la differenza che, per il Lemma di Diagonalizzazione, i punti fissi in PA esistono sempre).

Problemi:

- 1) Dare una buona descrizione dell'insieme delle formule PA-valide
- 2) Dare una buona descrizione dell'insieme delle formule che sono T valide per ogni r.e. estensione T di PA
- 3) Trovare, se possibile, un'estensione di QGL che goda della proprietà del punto fisso e sia PA-valida.

Bibliografia sommaria

- [1] A. Avron, "On modal theories having arithmetical interpretations".
In corso di pubblicazione sul Journal of Symbolic Logic.
- [2] G. Boolos, "The unprovability of consistency. An essay in modal logic". Cambridge 1979.
- [3] F. Montagna, "The predicate modal logic of Provability".
In corso di pubblicazione su "Notre Dame Journal Logic".
- [4] G. Sambin - S. Valentini, "The modal logic of provability; the sequential approach".
"Journal of Philosophical Logic 11 (1982)
pp. 311-342.