Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



# LOGICA EFFETTIVA $L_e$

*Antonio Vincenzi*

Lo studio della *"logica dei calcolatori"* é stato finora centrato sulle caratteristiche logiche dei programmi (v. [MT]). La *logica effettiva,* che qui presentiamo, realizza un approccio alternativo alla questione, basato sulle caratteristiche del funzionamento autonomo dei calcolatori. Questa logica viene introdotta — nello stile dell'*Abstract Model Theory* — come una terna $L_e = \langle \mathcal{E}, sent_e, \models_e \rangle$, in cui $\mathcal{E}$ é un *dominio semantico*, $sent_e$ é una *sintassi* ed $\models_e$ una *relazione di soddisfazione* (v. [**Mu**]).

**Dominio semantico.** Una *struttura effettiva* é una coppia $\mathfrak{A} = \langle \|\mathfrak{A}\|, \mathrm{A} \rangle$, in cui $\|\mathfrak{A}\|$ é una struttura ordinaria (con universo $A$), relativa ad un tipo $\tau(\mathfrak{A})$ provvisto di cardinalità e contenente infiniti simboli costante, ed $\mathrm{A}$ é una *macchina effettiva* (v. [**Vi1**]), contenuta in $\mathrm{HF}(A)$ ed universale rispetto ad una classe $\{\mathrm{A}_s | s \in \tau(\mathfrak{A})\}$ di macchine effettive, che si comportano come accettori quando s é un simbolo relazione e come generatori quando s é un simbolo funzione o costante. Il *dominio semantico* $\mathcal{E}$ é allora la categoria che ha come oggetti le strutture effettive e come frecce le immersioni isomorfe che conservano la parte "meccanica" di tali strutture.

**Sintassi.** La *sintassi* di $L_e$ coincide con quella della logica del prim'ordine. In particolare $sent_e(\tau)$ l'insieme degli *enunciati* del prim'ordine relativi al tipo $\tau$.

**Semantica**. Data una struttura effettiva $\mathfrak{A} = \langle \|\mathfrak{A}\|, A \rangle$, diremo che una *condizione di forcing* $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant, f \rangle$ (v. [**Ke**,p.99]) é *adeguata* ad $\mathfrak{A}$ quando, per ogni $p \in P$,

$$p \subseteq \{\vartheta \in \text{Diagramma}(\|\mathfrak{A}\|) \mid \vartheta \text{ é accettato da } A\},$$

$$\text{Card}(p) < \omega,$$

$$f(p) = \{\vartheta \in p \mid \vartheta \text{ é atomico}\}$$

e quando $\leqslant\ =\ \subseteq$. In questa situazione chiameremo gli elementi di P *calcoli (relativi ad* $\mathfrak{A}$*)* e leggeremo la relazione $p \Vdash \varphi$ (definita in [**Ke**,p.99]) *"p risolve* $\varphi$*"*. Dopodiché la relazione $\models_e$ può essere definita stabilendo che

$\mathfrak{A} \models_e \varphi$ sse c'é un calcolo $p$ relativo alla struttura $\mathfrak{A}$ che risolve $\varphi$.

Queste definizioni permettono di sviluppare un'analisi abbastanza dettagliata delle caratteristiche logiche dei calcolatori, analisi che si articola attorno ai seguenti teoremi:

**Teorema del modello generico**. *Per ogni calcolo generico* $G$ *relativo ad* $\mathfrak{A}$ *(v. [**Ke**,p.100]), esiste una struttura ordinaria* $\|\mathfrak{B}\|$ *di tipo* $\tau(\mathfrak{A})$ *ed universo* $B$*, tale che*

*(a) ogni elemento di* $B$ *é l'interpretazione di qualche simbolo costante di* $\tau(\mathfrak{A})$*;*

*(b) per ogni* $\varphi \in \text{sent}_e(\tau(\mathfrak{A}))$*,* $\|\mathfrak{B}\| \models_{\omega\omega} \varphi$ *sse* $G \Vdash \varphi$.

**Teorema fondamentale della logica effettiva**. $L_e$ *é una logica astratta più debole di quella del prim'ordine.*



**Teorema di compattezza**. *Ogni insieme di enunciati inconsistente in* $L_e$ *contiene un insieme finito di enunciati inconsistente in* $L_e$.

**Teorema di Robinson**. *Per ogni coppia* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *di strutture effettive tali che* $\mathfrak{A} \restriction \tau(\mathfrak{A}) \cap \tau(\mathfrak{B}) \equiv_e \mathfrak{B} \restriction \tau(\mathfrak{A}) \cap \tau(\mathfrak{B})$*, c'é una struttura effettiva* $\mathfrak{M}$ *di tipo* $\tau(\mathfrak{A}) \cup \tau(\mathfrak{B})$*, tale che* $\mathfrak{M} \restriction \tau(\mathfrak{A}) \equiv_e \mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{M} \restriction \tau(\mathfrak{B}) \equiv_e \mathfrak{B}$.

Rimandando a [Vi2] per i risultati più strettamente tecnici od applicativi che contornano i precedenti teoremi (come le proprietà di *interpolazione* e *definibilità* o le applicazioni all'analisi dei *linguaggi di programmazione strutturati*), notiamo che essi danno una parziale risposta ai problemi (2), (3) e (4) posti nell'introduzione di [Ti]. Il *Teorema del modello generico* ed il *Teorema di compattezza* mostrano, inoltre, come le dimostrazioni ottenute in $L_e$ possano essere sempre ricondotte a dimostrazioni sviluppate nella logica del prim'ordine. Assumento la seguente *TESI DI RAPPRESENTAZIONE:*

> *"*$L_e$ *é la logica che governa il funzionamento autonomo di ogni calcolatore",*

questo implica che le dimostrazioni ottenute con l'ausilio di un calcolatore sono del tutto assimilabili a quelle ottenute "con carta e penna" (cfr. [**Lo**,pp.203-206]).

Riferimenti.

[Ke] Keisler,H.J.: *Forcing and the omitting types theorem*. In: Studies in Model Theory (Morley, M. ed.), American Mathematical Society (1973), 96-133.

[Lo] Lolli,G.: *La dimostrazione in matematica: analisi di un dibattito*. Bollettino U.M.I. (6) 1-A (1982), 197-216.

[MT] Mayer,A.R., Tiuryn,J.: *A Note On Equivalences Among Logics Of Programs*. In: Logics of Programs (Kozen,D. ed.), Springer Lecture Notes in Computer Science 131 (1982), 282-299.

[Mu] Mundici,D.: *Lectures on Abstract Model Theory II: A Generalization of Abstract Model Theory*. Quaderni dell'Istituto Matematico "U.Dini" di Firenze, 7 (1981/82).

[Ti] Tiuryn,J.: *A survey of the logic of effective definitions*. In: Logic of Programs (Engeler,E. ed), Springer Lecture Notes in Computer Science 125 (1981), pp.198-245.

[Vi1] Vincenzi,A.: *Gli esperimenti come macchine astratte*. In questi Atti (1981/82).

[Vi2] Vincenzi,A.: *Effective Logic* $L_e$. In preparazione.