Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

FUNZIONI RICORSIVE VELOCEMENTE CRESCENTI E ORDINALI ASSOCIATI

Piergiorgio Odifreddi

Dipartimento di Informatica

Università di Torino

INTRODUZIONE

La matematica classica (opposta storicamente a quella moderna, che si concentra su strutture astratte) studia oggetti matematicamente concreti. I numeri interi, i numeri reali e le funzioni di variabile reale sono tipici esempi di tali oggetti, a tre diversi e consecutivi livelli di complessità logica (se si pensano gli interi come oggetti atomici di tipo 0, i reali come funzioni di variabile intera e quindi come oggetti di tipo 1, e le funzioni di variabile reale come oggetti di tipo 2).

Lo studio degli interi e delle funzioni di variabile reale era già entrato nella maturità nel 1600 (dando luogo alla teoria dei numeri ed alla analisi). Lo studio dei numeri reali (o equivalentemente delle funzioni di variabili intera) é stato invece trascurato sino alla fine dell'ottocento. La *teoria della ricorsività* come noi la intendiamo (ODIFREDDI [?]) é appunto l'indagine sistematica della struttura del continuo: come tale essa colma una lacuna della matematica classica e ne diviene una parte integrante accanto alla teoria dei numeri ed alla analisi. In particolare essa rivendica per sé ed eventualmente reinterpreta una serie di risultati che contingentemente possono essere scaturiti in aree diverse della matematica (in speciale modo nella teoria degli insiemi). I suoi metodi di approccio all'analisi del continuo sono essenzialmente due:

- uno globale di smembramento: si spezza il continuo in classi di equivalenza (dette *gradi di insolubilità*) rispetto a svariate relazioni, con l'idea di identificare tra loro funzioni che differiscono in modo inessenziale in una certa ottica e si studia la struttura formata dalle classi di equivalenza
- uno locale di costruzione dal basso: partendo da determinate classi e costruendone di nuove con metodi più o meno effettivi si generano *gerarchie di funzioni*, che contengono solitamente solo piccole parti del continuo. Esempi tipici sono la gerarchia aritmetica e quella di Borel.

I due approcci sono in realtà complementari, nel senso che una volta compresa la struttura di certe classi di funzioni mediante l'analisi locale, ciò che rimane da studiare dal punto di vista globale é appunto la struttura del continuo modulo tale analisi (quando essa fornisce la base per una relazione di equivalenza).

La *teoria delle funzioni ricorsive* é una miniaturizzazione della teoria della ricorsività, avente come scopo lo studio di una raffigurazione costruttiva del continuo costituita non più da tutte le funzioni di variabile intera, ma soltanto da quelle calcolabili effettivamente (dette *ricorsive*). Tale teoria rientra nell'ambito della teoria della ricorsività classica (in quanto analisi locale di una piccola porzione del continuo classico), ma nell'ambito di certe filosofie costruttiviste (che accettano come esistenti solo funzioni effettivamente calcolabili)

essa *é* addirittura la teoria della ricorsività (in quanto allora il continuo coincide con il continuo costruttivo). I metodi di approccio alla analisi del continuo costruttivo sono simili a quelli visti sopra per il continuo classico: gradi e gerarchie.

In queste lezioni ci proponiamo di dare un'idea della teoria delle gerarchie per funzioni ricorsive, presupponendo una conoscenza della teoria elementare delle funzioni ricorsive e rinviando al nostro libro per una trattazione sistematica.

1. FUNZIONI ELEMENTARI (9.1.84)

Iniziamo il nostro studio cercando di isolare una classe di funzioni di variabile intera che sia sufficientemente naturale e che contenga le funzioni di uso comune nella matematica elementare. Certamente vorremo avere somma e prodotto e le loro inverse fra le nostre funzioni: questo ci fornirà una classe di funzioni con una struttura analoga a quella di campo. Inoltre, analogamente a quanto si fa dal punto di vista algebrico per ottenere una struttura completa, permetteremo operazioni di somma e prodotto infinitarie. Diamo quindi la seguente:

Definizione 1. (CSILLAG, KALMAR [43]). La classe $\mathcal{E}$ delle *funzioni elementari* é la minima classe

— contenente le seguenti funzioni:

$s(x) = x+1$ (successore)

$0(x) = 0$ (costante zero)

$I_i^n(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ per $1 \leqslant i \leqslant n$ (identità)

$x+y$ (somma)

$x \dot{-} y$ (differenza ricorsiva: uguale a $x-y$ se $x \geq y$, 0 altrimenti)

$x \cdot y$ (prodotto)

$[\frac{x}{y}]$ (parte intera del quoziente)

— chiusa rispetto a composizione:

$$f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_n(\bar{x}))$$

— chiusa rispetto a somme e prodotti limitati

$$g(\bar{x},y) = \Sigma_{z \leq y} f(\bar{x},z)$$

$$h(\bar{x},y) = \Pi_{z \leq y} f(\bar{x},z).$$

La classe $\mathcal{E}(f)$ delle funzioni elementari in f é definita analogamente aggiungendo f alle funzioni iniziali. Un predicato é inoltre elementare (in f) se tale é la sua funzione caratteristica. □

Si può far vedere, con una serie di calcoli, come la classe delle funzioni e dei predicati elementari abbia forti proprietà di chiusura, ad esempio rispetto ai connettivi logici, ai quantificatori limitati ed alla ricorsione primitiva limitata. Cioé, se una funzione f é definita per ricorsione primitiva

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y))$$

a partire da funzioni g ed h elementari, ed essa é maggiorata da una funzione elementare, allora é essa stessa elementare. Analogamente, la ricerca limitata di elementi che soddisfino predicati elementari é elementare: cioé se

$$f(\bar{x}) = \mu x \mathrm{R}(\bar{x},y) = \text{minimo } y \text{ tale che } \mathrm{R}(\bar{x},y)$$

con R elementare ed f é maggiorata da una funzione elementare, allora essa stessa é elementare.

Tali fatti permettono di provare che molte funzioni e predicati di uso comune sono elementari, ad esempio:

p_n = n-esimo numero primo

$\langle x_1,\ldots,x_n \rangle$ = numero di codifica di $x_1,\ldots,x_n$

$\mathrm{Cod}x \equiv x$ é un numero di codifica

$(x)_i$ = i-esimo numero della sequenza codificata da x (quando $\mathrm{Cod}x$).

In altre parole, esiste un meccanismo elementare di codifica e decodifica. Si ha quindi:

Teorema 2. Forma normale per le funzioni ricorsive (KLEENE [36], BERECZKI [52], GRZEGORCZYCK [53]). *Esistono una funzione elementare* U *e, per ogni n, un predicato elementare* $\mathrm{T}_n(e,\bar{x},y)$ *tali che le funzioni ricorsive n-arie sono esattamente quelle della forma*

$$\varphi_e(\bar{x}) \simeq \mathrm{U}(\mu y \mathrm{T}_n(e,\bar{x},y)).$$

Dimostrazione. Intuitivamente:

$\mathrm{T}_n(e,\bar{x},y) \equiv$ la macchina di Turing codificata da e effettua, sull'input $\bar{x}$, un calcolo codificato da y

$\mathrm{U}(y)$ = il valore dell'output dato dal calcolo codificato da y.

Poiché esiste un meccanismo elementare di codifica e decodifica, il teorema é allora immediato. □

Dal teorema deriva una serie di conseguenze. Ad esempio: lo schema di ricorsione non é necessario per definire le funzioni ricorsive (KLEENE [36a]), e le funzioni elementari sono sufficienti per generare tutti gli insiemi ricorsivamente enumerabili. La classe delle funzioni elementari é dunque piuttosto ricca. Inoltre, essa ha proprietà computazionali molto naturali espresse dal seguente:

Teorema 3. (RITCHIE [63]). *Sono equivalenti:*

(a) f é elementare;

(b) f é calcolabile in tempo (cioé numero di mosse su una macchina di Turing) elementare;

(c) f é calcolabile in spazio (cioé numero di caselle del nastro di una macchina di Turing) elementare.

Dimostrazione. Se f é calcolabile in tempo t é anche calcolabile in spazio t (poiché in ogni mossa una macchina di Turing può visitare al più una nuova casella), mentre se f é calcolabile in spazio t é anche calcolabile in spazio c^t per qualche costante c (se la macchina si ferma, non può mai trovarsi due volte in una stessa configurazione; e se c sono i simboli che la macchina può scrivere sul nastro, c^n sono le possibili scritture su un nastro di lunghezza n). Poiché $\mathcal{E}$ é chiusa rispetto ad esponenziale, *(b)* e *(c)* sono dunque equivalenti. Per induzione sulla definizione di $\mathcal{E}$ si può facilmente provare che *(a)* implica *(b)*. Il viceversa discende dal fatto che esiste una funzione elementare g tale che se $\varphi_e(\bar{x})$ converge in meno di z passi allora $g(e,\bar{x},z)$ maggiora la codifica di una computazione di $\varphi_e(\bar{x})$ (g si può facilmente trovare notando che la computazione consiste di al più z configurazioni, ciascuna delle quali usa al più z caselle del nastro oltre a quelle necessarie per scrivere lo

input. Allora se f é calcolabile in tempo t con la macchina codificata da e,

$$f(\bar{x}) \simeq \mathrm{U}(\mu y_{\leqslant g(e,\bar{x},t(\bar{x}))}\mathrm{T}_n(e,\bar{x},y))$$

e se t é elementare allora (poiché per il teorema 2 anche U e T_n lo sono, e tale é g per costruzione) anche f é elementare. □

Un teorema analogo vale per $\mathcal{E}(f)$, quando f sia essa stessa calcolabile in tempo elementare in f (o, come si dice, f sia *elementarmente onesta*).

Poiché le funzioni elementari sono calcolabili in tempo o spazio elementari, ogni classificazione della velocità di crescita delle funzioni elementari (cioé ogni successione di funzioni elementari cofinale in $\mathcal{E}$) indurrà una classificazione delle funzioni elementari. A questo proposito si ha il seguente:

Teorema 4. (BERECZKI [52], GRZEGORCZYCK [53]). *Siano* $b_0(x) = x$ *e* $b_{n+1}(x) = x^{b_n(x)}$, *cioé*

$$b_n(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}} \Big\} \; n+1 \text{ volte.}$$

Allora:

(a) ogni b_n é elementare;

(b) ogni funzione elementare é maggiorata quasi ovunque da qualche b_n;

(c) la funzione diagonale

$$b_x(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}} \Big\} \; x+1 \text{ volte}$$

maggiora ogni funzione elementare, e non é quindi elementare.

Dimostrazione. *(a)* é ovvio perché $\mathcal{E}$ é chiusa rispetto all'esponenziale, e *(c)* segue da *(b)*. Questo é provato per induzione sulla costruzione di $\mathcal{E}$, usando ovvie proprietà di monotonia della successione $\{b_n\}_{n\in\omega}$ e il fatto essenziale che la definizione di $\mathcal{E}$ usa somme e prodotti (iterati) che sono maggiorati dall'esponenziale (iterato). □

Si noti che l'iterazione di qualunque funzione che cresca sufficientemente veloce (ad esempio 2^x) avrebbe prodotto lo stesso effetto. Analogamente, se f cresce sufficientemente veloce (ad esempio $f(x)\geqslant 2^x$) allora l'iterazione di f, $f^{(x)}(x)$, non é elementare in f.

Come abbiamo anticipato, la successione $\{b_n\}_{n\in\omega}$ fornisce un'analisi computazionale di $\mathcal{E}$:

Definizione 5. Per ogni n,

EXP_n = classe delle funzioni calcolabili in tempo b_n

$\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE}$ = classe delle funzioni calcolabili in spazio b_n. □

Teorema 6. Teorema della gerarchia per $\mathcal{E}$ (RITCHIE [63]).

(a) Per ogni n, $\mathrm{EXP}_n \subsetneq \mathrm{EXP}_{n+1}$ *e* $\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE} \subsetneq \mathrm{EXP}_{n+1}\mathrm{SPACE}$.

(b) $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\omega}\mathrm{EXP}_n = \bigcup_{n\in\omega}\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE}$.

Dimostrazione. *(a)* entrambe le parti si provano per diagonalizzazione. Per le classi di spazio, si definisce una funzione $f\in \mathrm{EXP}_{n+1}\mathrm{SPACE}-\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE}$ dapprima simulando sull'input x una macchina di Turing che si ferma usando esattamente $b_{n+1}(x)$ caselle del nastro. Si determina così lo spazio che può essere usato per calcolare $f(x)$. Poi si simula il calcolo di $\varphi_x(x)$, e se questo

si può effettuare usando solo lo spazio consentito (in particolare così sarà se φ_x é calcolabile in spazio b_n) allora si definisce $f(x)\not\simeq\varphi_x(x)$. Per le classi di tempo si procede analogamente, simulando però in parallelo $\varphi_x(x)$ ed una macchina che si ferma in esattamente $b_{n+1}(x)$ mosse.

(b) poiché b_n é elementare, per il teorema 3 si ha $\mathrm{EXP}_n\subseteq\mathcal{E}$ e $\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE}\subseteq\mathcal{E}$, il che prova un'inclusione. Viceversa, se $f\in\mathcal{E}$ allora (ancora per il teorema 3) f é calcolabile in spazio e tempo elementari, e quindi in tempo e spazio b_n per qualche n (per il teorema 4). □

Non é noto se le due gerarchie EXP_n ed $\mathrm{EXP}_n\mathrm{SPACE}$ coincidono, almeno da un certo punto in poi. E non é neppure noto se le classi da esse definite sono linearmente ordinate. Si sa soltanto che vale la seguente figura (dove le frecce indicano inclusione):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EXP}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{EXP}_0\mathrm{SPACE} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{EXP}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{EXP}_2\mathrm{SPACE} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathrm{EXP}_1 \arrow[r] & \mathrm{EXP}_1\mathrm{SPACE} \arrow[r] & \mathrm{EXP}_3 \arrow[r] & \mathrm{EXP}_3\mathrm{SPACE} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per concludere lo studio di $\mathcal{E}$, vogliamo misurare la complessità della funzione diagonale $b_x(x)$ che cresce tanto velocemente da non essere elementare. Una possibile misura consiste nel contare il numero di passi necessario per definire $b_x(x)$ iterando la funzione crescente più semplice possibile (il successore).

Definizione 7. (WAINER [72]).

$$f_0(x) = 0$$

$$f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha(x)+1$$

$$f_\alpha(x) = f_{\alpha_x}(x) \qquad \text{per } \alpha \text{ limite}$$

dove per α limite $\{\alpha_x\}_{x\in\omega}$ é una successione crescente di ordinali con limite α (detta *sequenza fondamentale* per α). □

Poiché f_α per α limite dipende dalla sequenza fondamentale, si tratta di definire sequenze fondamentali naturali. Per $\alpha\leqslant\varepsilon_0$ scegliamo le seguenti:

per $\alpha = \beta+\omega^{\gamma+1}$: $\qquad \alpha_x = \beta+\omega^\gamma\cdot x$

per $\alpha = \beta+\omega^\gamma$, γ limite: $\qquad \alpha_x = \beta+\omega^{\gamma_x}$

per $\alpha = \varepsilon_0$: $\qquad \alpha_x = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\} x+1$ volte.

Allora:

Teorema 8. $f_{\varepsilon_0}(x) = b_x(x)$.

Dimostrazione. Si nota subito che per $\alpha,\beta<\varepsilon_0$ si ha

$$f_{\alpha+\beta}(x) = f_\alpha(x)+f_\beta(x)$$
$$f_{\omega^\alpha}(x) = x^{f_\alpha(x)}$$

e quindi $f_\alpha(x)$ si ottiene prendendo la forma normale di Cantor di α in base ω, e scrivendo x al posto di ω ovunque. In particolare $f_{(\varepsilon_0)_n} = b_n$ e quindi $f_{\varepsilon_0}(x) = b_x(x)$. □

2. FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE (10.1.84)

I risultati del paragrafo precedente possono essere interpretati come uno studio di ciò che si può fare senza l'uso della ricorsione, che é il procedimento classico più comune e potente per definire funzioni di variabile intera. Ci volgiamo ora al

problema opposto, cercando cioé di analizzare la forza di tale mezzo.

Definizione 9. (DEDEKIND [88], SKOLEM [23]). La classe $\mathcal{P}$ delle *funzioni ricorsive primitive* é la più piccola classe

— contenente le funzioni elementari

— chiusa rispetto a composizione

— chiusa rispetto a ricorsione primitiva

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$
$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y)). \quad \square$$

Anzitutto vorremmo giustificare la particolare forma dello schema di ricorsione introdotto: essa permette a prima vista soltanto ricorsioni in cui il valore di una funzione in un dato punto fa riferimento ad un solo valore precedentemente ottenuto (precisamente quello nel punto immediatamente precedente). Ciò si accorda con l'intuizione, che genera l'insieme dei numeri naturali in modo induttivo mediante l'operazione di successore. Che comunque tale particolare forma di ricorsione catturi in realtà l'essenza del processo di ricorsione su una sola variabile discende dal seguente:

Teorema 10. Teorema di completezza (PETER [34]). *$\mathcal{P}$ é chiusa rispetto ad ogni ricorsione su una sola variabile, dove per ricorsione si intende che nel calcolo di $f(\bar{x},y)$ si possono usare solo valori del tipo $f(\bar{t},s)$ con s di valore numerico minore di y (dove $\bar{t}$ ed s sono termini ottenuti da costanti numeriche, $\bar{x}$, y ed f mediante funzioni note).*

Dimostrazione. In generale il calcolo di $f(\bar{x},y)$ prenderà forma di albero, poiché in $\bar{t}$ ed s possono esserci occorrenze di f. La procedura di calcolo consiste nello sviluppare l'albero fino ad arrivare ai nodi in cui ci sono termini propri (senza occorrenze di f), che possono quindi venir valutati in modo diretto; e si risale poi nell'albero fino a raggiungere il vertice di partenza, eliminando via via le occorrenze più interne di f (mediante le equazioni che definiscono f). Stabilendo un ordine per le operazioni, il calcolo perde così la forma di albero e diventa lineare ma non immediatamente ricorsivo primitivo: infatti il processo di eliminazione cui si é appena accennato può far crescere la complessità totale del termine (perché elimina sì una occorrenza di f, ma introduce termini noti al suo posto). A ciò si ovvia assegnando opportunamente dei numeri di Gödel ai termini, in modo ricorsivo primitivo e tale che il processo di eliminazione di cui sopra faccia decrescere tali numeri. Il tutto si riduce così ad una ricorsione lineare sui numeri di Gödel. □

La classe delle funzioni ricorsive primitive ha dunque un eccezionale interesse matematico, poiché stabilisce esattamente i limiti di potenza del fondamentale principio di definizione per ricorsione (su di una sola variabile). Dal punto di vista computazionale, essa gode di proprietà analoghe a quelle già viste per $\mathcal{E}$:

Teorema 11. (KLEENE [36], COBHAM [64], MEYER [65]). *Sono equivalenti:*

(a) f é primitiva ricorsiva;

(b) f é calcolabile in tempo primitivo ricorsivo;

(c) f é calcolabile in spazio primitivo ricorsivo.

Dimostrazione. La dimostrazione é analoga a quella del teorema 3. In particolare lo schizzo là dato per l'implicazione *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* prova che se f é calcolabile in tempo t ricorsivo primitivo, allora f é ricorsiva. L'implicazione contraria si prova per induzione sulla costruzione di $\mathcal{P}$, e l'equivalenza di *(b)* *(c)* é stata provata nel teorema 3. □

Come già per le funzioni elementari, vorremmo ora classificare la velocità di crescita delle funzioni ricorsive primitive. Non é però immediatamente evidente dalla definizione di (a causa della particolare forma dello schema di ricorsione) quale principio adottare. Il prossimo risultato ci fornirà la intuizione necessaria: esso va nella direzione opposta del teorema 10, in quanto prova come sia possibile limitarsi ad una forma molto particolare di ricorsione senza perdere in potenza.

Teorema 12. (ROBINSON [47]). *$\mathcal{P}$ é la minima classe*

— *contenente le funzioni elementari*

— *chiusa rispetto a composizione*

— *chiusa rispetto ad* ***iterazione***

$$f(x,n) = t^{(n)}(x)$$

dove $t^{(0)}(x) = x$ *e* $t^{(n+1)}(x) = t(t^{(n)}(x))$.

Dimostrazione. E' sufficiente mostrare come f definita per ricorsione primitiva

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y))$$

sia definibile per composizione ed iterazione a partire da f,h ed alcune funzioni elementari. Si ponga:

$$t(\langle z,\bar{u},v\rangle) = \langle h(\bar{u},v,z),\bar{u},v+1\rangle$$

$$s(\bar{x},n) = t^{(n)}(\langle g(\bar{x}),\bar{x},0\rangle).$$

Allora per definizione

$$s(\bar{x},n) = \langle f(\bar{x},n),\bar{x},n\rangle$$

e quindi

$$f(\bar{x},n) = (s(\bar{x},n))_1.$$

Il risultato segue perché il meccanismo di codifica e decodifica é elementare. □

Dunque il procedimento di iterazione che ci ha permesso, nel paragrafo precedente, di uscire dalla classe delle funzioni elementari é in realtà sufficiente, se aggiunto a tale classe come principio definizionale, per generare tutte le funzioni ricorsive primitive. Sappiamo ora quanto basta per essere in grado di controllare la crescita di tali funzioni.

Teorema 13. (SUDAN [27], ACKERMANN [28], PETER [35], ROBINSON [48]). *Siano $h_0(x) = x+1$ e $h_{n+1}(x) = h_n^{(x)}(x)$. Allora:*

(a) ogni h_n é ricorsiva primitiva

(b) ogni funzione ricorsiva primitiva e maggiorata quasi ovunque da qualche h_n

(c) la funzione diagonale $h_\omega(x) = h_x(x)$ maggiora ogni funzione ricorsiva primitiva, e non é quindi ricorsiva primitiva.

Dimostrazione. *(a)* é ovvio e *(c)* discende da *(b)*. Questo é provato per induzione sulla costruzione di $\mathscr{P}$, usando la caratterizzazione del teorema 12 e ricordando che l'iterazione di ogni funzione f che cresca sufficientemente veloce maggiora ogni funzione elementare in f. Ora, per $n \geqslant 2$, h_n cresce sufficientemente veloce (si noti che $h_1(x) = 2\cdot x$ e $h_2(x) = x\cdot 2^x$). □

La definizione di h_ω ci permette immediatamente di capire quale principio faccia uscire dalle classe $\mathscr{P}$, nonostante le forti proprietà di chiusura date dal teorema 10. Per definire h_ω abbiamo bisogno della successione $\{h_n\}_{n\in\omega}$, che é definita dallo schema

$$h_0(x) = x+1$$

$$h_{n+1}(x) = h_n^{(x)}(x).$$

Poiché la h_n interviene non direttamente ma attraverso la sua iterazione, ci serve anche lo schema

$$h_n^{(0)}(x) = x$$

$$h_n^{(z+1)}(x) = h_n(h_n^{(z)}(x)).$$

Possiamo raggruppare tutte le equazioni in un solo schema che definisce la funzione $h(x,n,z) = h_n^{(z)}(x)$:

$$h(x,n,0) = x$$

$$h(x,0,1) = x+1$$

$$h(x,n+1,1) = h(x,n,x)$$

$$h(x,n,z+1) = h(h(x,n,z),n,1).$$

Tale funzione non é ricorsiva primitiva, altrimenti lo sarebbe anche

$$h_\omega(x) = h_x(x) = h(x,x,1).$$

E ciò che non é ricorsivo primitivo nella definizione di h é la ricorsione su *due* variabili (n e z). PETER [36] ha provato che particolari ricorsioni su due variabili (precisamente quando non ci sono occorrenze di h dentro ad altre occorrenze di h) sono ancora ricorsive primitive. Quindi ciò che rende la h non ricorsiva primitiva é la ricorsione su due variabili nella forma dell'ultima equazione.

Il teorema 13 ci permette di stratificare le funzioni ricorsive primitive.

Definizione 14. Per $n \geq 2$, $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}(h_n)$. □

Si considera solo $n \geq 2$ perché h_0, h_1 ed h_2 sono tutte elementari, e quindi generano la stessa classe. Il motivo per iniziare la gerarchia da $\mathcal{E}_3$ é puramente storico, in quanto tale notazione é largamente usata in letteratura.

Teorema 15. Teorema della gerarchia per $\mathcal{P}$ (GRZEGORCZYCK [53]).

(a) $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$

(b) per ogni $n \geq 3$, $\mathcal{E}_n \subsetneq \mathcal{E}_{n+1}$

(c) $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 3} \mathcal{E}_n$.

Dimostrazione. *(a)* ovvio, perché h_2 é elementare.

(b) h_n é elementare in h_{n+1} (per induzione su $m \leq n$, h_m é elementare in h_{n+1} perché definita per ricorsione primitiva maggiorata da h_{n+1}), e questo prova l'inclusione. Inoltre h_{n+1} non é elementare in h_n (essendo la sua iterazione, ed essendo h_n sufficientemente veloce), e questo prova l'inclusione propria.

(c) poiché ogni h_n é ricorsiva primitiva, $\bigcup_{n \geq 3} \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{P}$. Il viceversa si prova per induzione sulla definizione di $\mathcal{P}$: l'unico caso non banale é quello di f definita per ricorsione primitiva da g ed h. Sia n grande a sufficienza da avere $g, h \in \mathcal{E}_{n+1}$ (per ipotesi induttiva) ed f maggiorata da h_n (per il teorema 13). Allora f é definita in $\mathcal{E}_{n+1}$ per ricorsione limitata, quindi in modo elementare, e sta quindi in $\mathcal{E}_{n+1}$. □

La gerarchia di Grzegorczyck é estremamente naturale. Anzitutto, ciascuna classe $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 3)$ possiede le stesse proprietà computazionali di $\mathcal{E}$ date dal teorema 3 (questo é stato provato da COBHAM [64] e MEYER [65], e discende dal fatto, provato per induzione su n, che h_n é calcolabile in tempo elementare in h_n). Inoltre, esistono decine di differenti definizioni di gerarchie per $\mathcal{E}_n$, che risultano essere tutte equivalenti con quelle date sopra: fra esse citiamo soltanto la gerarchia che conta il numero di applicazioni dello schema di ricorsione nella definizione di una funzione ricorsiva primitiva (HEINERMANN [61], AXT [65]) e quella che conta il numero di istruzioni **loop** nei programmi per macchine a registri (MEYER-RITCHIE [67]). In particolare le classi $\mathcal{E}_n$ sono indipendenti dal tipo di definizione scelta, e misurano effettivamente la complessità di una funzione: se $f \in \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$ e $g \in \mathcal{E}_n$ allora f é più complicata di g perché la sua migliore definizione é più complessa (richiede più ricorsioni o più istruzioni **loop**), il suo calcolo richiede più tempo e più spazio e la sua crescita può essere più veloce di quella di g.

Poiché le funzioni h_n che permettono di definire la gerarchia di Grzegorczyck sono funzioni diagonali di iterazioni di funzioni crescenti velocemente, si possono definire per le classi $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$ gerarchie analoghe a quelle del teorema 6 per $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$. Altri raffinamenti sono possibili, vedi ad es. WAINER [72].

Per concludere il paragrafo vogliamo misurare la complessità della funzione diagonale h_ω, che é l'esempio canonico di funzione non ricorsiva primitiva. Naturalmente possiamo attenderci di dover usare un grande ordinale, in quanto già ε_0 passi sono necessari per ottenere l'iterazione della funzione esponenziale (teorema 8), che é una funzione equivalente (modulo operazioni elementari) ad h_3. Anzitutto anticipiamo che non sarà possibile trovare un α tale che $f_\alpha = h_\omega$: già la funzione h_3 é solo elementarmente equivalente ad f_{ε_0}. Ma per funzioni che crescono tanto velocemente, l'*equivalenza elementare* (che scriviamo $\equiv_{\&}$ e significa che due funzioni sono una elementare nell'altra) é una ottima approssimazione. L'idea per il nostro calcolo é la seguente: per ottenere $f_{\varepsilon_0} \equiv_{\&} h_3$ siamo partiti dalla funzione esponenziale $f_{\omega^\omega} \equiv_{\&} h_2$ e l'abbiamo iterata. L'ordinale ε_0 é il tempo necessario per completare l'iterazione, cioé per ottenere un punto fisso per l'esponenziazione ordinale ω^β. Poiché h_{n+1} é la iterazione di h_n, dovremo iterare il processo che ci ha portato ad ε_0. Poniamo quindi

Definizione 16. (VEBLEN [08]).

$$\phi_0(\beta) = \omega^\beta$$

$$\phi_{\alpha+1}(\beta) = \text{il } \beta\text{-esimo punto fisso di } \phi_\alpha$$

$$\phi_\alpha(\beta) = \text{il } \beta\text{-esimo punto fisso di } \phi_\gamma \text{ per ogni } \gamma<\alpha. \qquad \square$$

Da questa definizione si possono ricavare le seguenti sequenze fondamentali per ordinali limiti $\alpha\leqslant\phi_\omega(0)$:

$\alpha = \omega^{\beta+1}$:	$\alpha_x = \omega^\beta \cdot x$
$\alpha = \omega^\beta$, β limite:	$\alpha_x = \omega^{\beta_x}$
$\alpha = \phi_{n+1}(0)$:	$\alpha_x = \phi_n^{(x)}(0)$
$\alpha = \phi_{n+1}(\beta+1)$:	$\alpha_x = \phi_n^{(x)}(\phi_{n+1}(\beta)+1)$
$\alpha = \phi_{n+1}(\beta)$, β limite:	$\alpha_x = \phi_{n+1}(\beta_x)$
$\alpha = \gamma+\beta$, β limite:	$\alpha_x = \gamma+\beta_x$
$\alpha = \phi_\omega(0)$:	$\alpha_x = \phi_x(0)$

(si ricordi che — come nel caso di ε_0 — i punti fissi si ottengono per iterazione, il che spiega la particolare forma delle sequenze). Usando tali sequenze nella definizione 7, si ha f_α per ogni $\alpha\leqslant\phi_\omega(0)$.

Teorema 17. (GIRARD [81]).

(a) $h_{n+2} \equiv_{\&} f_{\phi_n(0)}$

(b) $h_\omega \equiv_{\&} f_{\phi_\omega(0)}$.

Dimostrazione. Se

$$H_0(x,y) = x^y$$

$$H_{n+1}(x,0) = H_n^{(x)}(x,0)$$

$$H_{n+1}(x,y+1) = H_n^{(x)}(x,H_{n+1}(x,y)+1)$$

(dove l'iterazione é pensata sulla seconda variabile) allora $H_n(x,0)$ ed h_{n+2} sono elementarmente equivalenti, e per induzione si prova che per $\phi_n(\alpha)\leqslant\phi_\omega(0)$:

$$f_{\phi_n(\alpha)}(x) = H_n(x,f_\alpha(x))$$

così che

$$f_{\phi_n(0)}(x) = H_n(x,0). \qquad \square$$

3. FUNZIONI ε_0-RICORSIVE (11.1.84 e 12.1.84)

Un'idea per estendere la classe delle funzioni ricorsive primitive ci viene dall'analisi di h_ω fatta dopo il teorema 13: permettere cioé ricorsioni su più variabili. Tale approccio é seguito da PETER [36], [51] e definisce una gerarchia, nel senso che per ogni n la ricorsione su $n+1$ variabili permette di ottenere funzioni non ottenibili con ricorsioni su n variabili. Tale approccio non é però ulteriormente estendibile, e questo é uno svantaggio perché solo una piccola parte delle funzioni ricorsive é ottenuta con tali metodi.

E' più utile pensare in questi termini: definendo una funzione per ricorsione su due variabili si continuano ad usare soltanto valori precedentemente ottenuti, nel senso che si usano valori in cui almeno una delle due variabili é diminuita. Si può quindi ancora pensare una tale ricorsione come su una sola variabile (la coppia delle due variabili) ma relativamente ad un buon ordine di lunghezza ω^2 (l'ordine lessicografico naturale delle coppie di interi). Analogamente, la ricorsione su n variabili si può pensare come ricorsione su una sola variabile, relativamente ad un buon ordine di lunghezza ω^n. Siamo dunque condotti a considerare ricorsioni su buon ordini qualunque.

Definizione 18. (HILBERT-BERNAYS [39]). Sia $<$ un buon ordine degli interi con primo elemento 0. Le *funzioni $<$-ricorsive* sono la minima classe:

- contenente le funzioni ricorsive primitive
- chiusa rispetto a composizione
- chiusa rispetto a $<$-ricorsione

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},q(\bar{x},y+1)))$$

dove q é una funzione $<$-regressiva, cioé $q(\bar{x},0) = 0$ e $q(\bar{x},y+1) < y+1$. □

Si permettono funzioni $<$-regressive qualunque perché in genere non esiste una funzione predecessore canonica (il problema é dove scendere, partendo da punti limiti).

Poiché ci sono esempi patologici di buon ordini (ogni funzione ricorsiva é $<$-ricorsiva per un buon ordine elementare $<$ di ordinale ω, MYHILL [53]), dovremo restringerci a buon ordini naturali.

Definizione 19. (HILBERT-BERNAYS [39]). Sia

$$\omega(0) = 1$$

$$\omega(n+1) = \omega^{\omega(n)}.$$

Definiamo per induzione su $n \geq 1$

$<_n$: buon ordine degli interi di ordinale $\omega(n)$

$\mathrm{ord}_n(x)$: ordinale associato ad x in $<_n$

$\mathrm{num}_n(\alpha)$: notazione di $\alpha < \omega(n)$ in $<_n$.

Così $\mathrm{num}_n \mathrm{ord}_n(x) = x$ e $\mathrm{ord}_n \mathrm{num}_n(\alpha) = \alpha$ per $\alpha < \omega(n)$.

(a) per $n = 1$: $<_1 \; = \; <$, $\mathrm{ord}_1(x) = x$, $\mathrm{num}_1(\alpha) = \alpha$;

(b) dati $<_n$, ord_n e num_n

— se $\beta = \omega^{\alpha_1}\cdot a_1+\ldots+\omega^{\alpha_m}\cdot a_m$ con $0 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ e $a_1,\ldots,a_m$ interi allora

$$\mathrm{num}_{n+1}(\beta) = (p^{a_1}_{\mathrm{num}_n(\alpha_1)} \cdot \ldots \cdot p^{a_m}_{\mathrm{num}_n(\alpha_m)}) \dot{-} 1$$

— se $b_m <_n \ldots <_n b_1$ e $b = p_{b_1}^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_{b_m}^{a_m}$ allora

$$\mathrm{ord}_{n+1}(b) = \omega^{\mathrm{ord}_n(b_1)} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{\mathrm{ord}_n(b_m)} \cdot a_m$$

— $x <_{n+1} y$ sse $\mathrm{ord}_{n+1}(x) < \mathrm{ord}_{n+1}(y)$. □

Definizione 20. (KREISEL [52]). Sia α un ordinale limite:

(a) per $\alpha < \varepsilon_0$, una funzione é α-*ricorsiva* se é $<_\alpha$-ricorsiva, dove $<_\alpha$ é la sezione inferiore di $<_n$ determinata da $\mathrm{num}_n(\alpha)$, per il minimo n tale che $\alpha < \omega(n)$.

(b) una funzione é ε_0-*ricorsiva* se é α-ricorsiva per qualche $\alpha < \varepsilon_0$. □

Analogamente al teorema 10 si ha:

Teorema 21. Teorema di completezza (KREISEL [52]). *La classe delle funzioni ε_0-ricorsive é chiusa ad ogni ricorsione su una sola variabile (sui buoni ordini canonici di ordinale minore di ε_0).*

Dimostrazione. La dimostrazione é simile a quella del teorema 10. L'albero di calcolo é sempre finitamente generato, ma la ricorsione é ora una α-ricorsione per qualche $\alpha < \varepsilon_0$. Per poterla riportare in forma lineare (mediante opportune assegnazioni ordinali ai termini) si passa in modo naturale ad una ω^α-ricorsione, il che fa dunque rimanere tra le funzioni ε_0-ricorsive. □

Dunque la ε_0-ricorsione coglie l'essenza e la generalità della ricorsione su ordinali fino ad ε_0. Si può provare che ciò non é vero per ordinali minori di ε_0. Ad esempio, per ridurre in forma lineare ricorsioni complicate sull'ordinale $\omega(n)$ é in generale necessario usare $\omega(n+1)$-ricorsioni (TAIT [61], WAINER [72]). Dunque da questo punto di vista ε_0 é il primo ordinale dopo ω che ci dia una classe di funzioni con forti proprietà di chiusura.

Per poter analizzare la struttura della classe delle funzioni ε_0-ricorsive, vorremmo avere un risultato come il teorema 12, che semplifica essenzialmente la forma della ricorsione.

Teorema 22. (TAIT [61], ROBBIN [65]). *Per $\alpha < \varepsilon_0$ limite, le funzioni α-ricorsive sono la minima classe contenente*

— *contenente le funzioni ricorsive primitive*

— *chiusa rispetto ad operazioni ricorsive primitive (cioé composizione e ricorsione primitiva su ω)*

— *chiusa rispetto ad α-**annientamento**, cioé*

$$t(\bar{x},0) = 0$$

$$t(\bar{x},y+1) = 1+t(\bar{x},q(\bar{x},y+1))$$

dove $q(\bar{x},0) = 0$ e $q(\bar{x},y+1) <_\alpha y+1$ (cioé t conta il numero di passi necessari per arrivare a 0 usando ripetutamente q).

Dimostrazione. Sia f definita per α-ricorsione

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},q(\bar{x},y+1))).$$

Se f_1 é definita per ricorsione primitiva su ω da

$$f_1(\bar{x},y,0) = g(\bar{x})$$

$$f_1(\bar{x},y,z+1) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{se } y=0 \\ h(\bar{x},y\dot{-}1,f_1(\bar{x},q(\bar{x},y),z)) & \text{se } y>0 \end{cases}$$

(cioé $f_1(\bar{x},y,z)$ é il risultato di z passi nel calcolo di $f(\bar{x},y)$) allora

$$f(\bar{x},y) = f_1(\bar{x},y,t(\bar{x},y)). \quad \square$$

Teorema 23. (WAINER [70], SCHWICHTENBERG [71]). *Siano*

$$h_0(x) = x+1$$

$$h_{\alpha+1}(x) = h_\alpha^{(x)}(x)$$

$$h_\alpha(x) = h_{\alpha_x}(x) \qquad \textit{per } \alpha \textit{ limite.}$$

Allora

(a) ogni h_α (per $\alpha<\varepsilon_0$) é ε_0-ricorsiva

(b) ogni funzione ricorsiva primitiva é maggiorata quasi ovunque da qualche h_α $(\alpha<\varepsilon_0)$

(c) la funzione diagonale h_{ε_0} maggiora ogni funzione ε_0--ricorsiva, e non é quindi ε_0-ricorsiva

Dimostrazione. *(a)* $\{h_\alpha\}_{\alpha<\omega(n)}$ é uniformemente ε_0-ricorsiva: la definizione data sopra non é immediatamente tale (essendo una ricorsione su due variabili α,x), ma si può facilmente definire h tale che

$$h_\alpha^{(m)}(x) = h(\omega^\alpha+m,x)$$

Così $\{h_\alpha\}_{\alpha<\omega(n)}$ é uniformemente $\omega(n+1)$-ricorsiva.

(b) per induzione su ε_0 si prova che se $\alpha<\beta<\varepsilon_0$ allora h maggiora h . Questo fatto, con la caratterizzazione data dal teorema 22 (che semplifica la ricorsione) ad un'analisi dettagliata (laboriosa e non banale) delle proprietà di uniformità del sistema di notazioni ordinali danno il risultato.

(c) deriva come al solito da *(b)*. $\square$

La gerarchia di Grzegorczyck (definizione 14) può essere estesa in modo naturale:

Definizione 24. Per $3\leqslant\alpha\leqslant\varepsilon_0$:

— se $\alpha = \beta+1$, $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}(h_\beta)$

— se α limite, $\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{E}_\beta$ $\quad\square$

Teorema 25. Teorema della gerarchia per le funzioni ε_0-ricorsive (CONSTABLE [70], WAINER [70], SCHWICHTENBERG [71]).

(a) per $3\leqslant\alpha<\beta\leqslant\varepsilon_0$, $\mathcal{E}_\alpha \subsetneq \mathcal{E}_\beta$

(b) $\mathcal{E}_\omega$ = funzioni ricorsive primitive

(c) $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ = funzioni ε_0-ricorsive.

Dimostrazione. *(a)* Si tratta di provare, come nel caso finito, che se $\alpha<\beta<\varepsilon_0$ allora h_α é elementare in h_β ma non viceversa.

(b) per il teorema 15.

(c) l'unica cosa non banale é che $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ sia chiuso rispetto ad α-annientamento. Ma se

$$t(\bar{x},0) = 0$$

$$t(\bar{x},y+1) = 1+t(\bar{x},q(\bar{x},y+1))$$

allora

$$t(\bar{x},y) = \mu z(g(\bar{x},y,z) = 0)$$

dove

$$g(\bar{x},y,0) = y$$

$$g(\bar{x},y,z+1) = q(\bar{x},g(\bar{x},y,z)).$$

Se $q\in\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ allora anche $g\in\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ (perché definita per ricorsione primitiva su ω). Poiché t é ε_0-ricorsiva, é maggiorata da qualche h_α (teorema 23). Possiamo supporre α grande a sufficienza da avere $g \in \mathcal{E}_\alpha$: allora t é definita mediante μ-operatore limitato (da h_α), quindi sta in $\mathcal{E}_{\alpha+1}$. □

Ciascuna classe $\mathcal{E}_\alpha$ per $\alpha \leqslant \varepsilon_0$ (ed in particolare quindi la classe delle funzioni ε_0-ricorsive) possiede le stesse proprietà computazionali di $\mathcal{E}$ date dal teorema 3. Inoltre $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ può essere variamente caratterizzata ed appare quindi indipendentemente in differenti contesti: é dunque una classe di funzioni naturale ed importante. Citiamo soltanto i due seguenti fatti: $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ é la classe di funzioni indotta dai funzionali ricorsivi primitivi usati da Gödel nella sua dimostrazione di consistenza dell'analisi (GÖDEL [58], KREISEL [59], TAIT [59]), ed é anche la classe delle funzioni ricorsive di cui si può provare la totalità nell'aritmetica di Peano o, equivalentemente, in quella di Heyting (KREISEL [58],[59]). In particolare, da quest'ultima caratterizzazione e dal teorema 23 discende che non si può provare in **PA** che h_{ε_0} sia totale. Ciò permette di provare l'indipendenza da **PA** di quegli enunciati veri il cui enunciato si può esprimere dicendo che un certo predicato ha sempre termine (enunciati quindi di tipo $\forall\exists$), quando risulti che il numero di passi necessari per la terminazione é grande almeno quanto h_{ε_0} (più tecnicamente, quando h_{ε_0} é il limite inferiore ad ogni possibile skolemizzazione dell'enunciato). In questo modo KETONEN-SOLOVAY [81] e CICHON [83] hanno riprovato rispettivamente i teoremi di indipendenza di PARIS-HARRINGTON [77] e KIRBY-PARIS [82].

Per finire vorremmo come al solito misurare la complessità della funzione diagonale h_{ε_0}. Ricordiamo (teorema 17) che

$$h_\omega \equiv_{\mathcal{E}} f_{\phi_\omega(0)}$$

Per ottenere $h_{\omega+1}$ dovremo iterare il processo che ha portato ad h_ω, ed in termini ordinali questo significa prendere un punto fisso: in altre parole dobbiamo considerare il più piccolo α tale che $\phi_\alpha(0) = \alpha$ (detto Γ_0, vedi ad esempio FEFERMAN [68]). Per ottenere $h_{\omega+2}$ dovremo considerare i punti fissi di $\phi_\alpha(0)$, enumerandoli in una successione Γ_α e prendere il primo punto fisso di tale enumerazione (cioé il minimo α tale che $\Gamma_\alpha = \alpha$), ecc. Siamo quindi portati a considerare una nuova sequenza di punti fissi del secondo ordine di $\phi_\alpha(\beta)$, rispetto ad α (mentre prima nella definizione 16 consideravamo punti fissi del primo ordine, rispetto a β). Per tener conto di questi due differenti tipi di punti fissi, definiamo ora $\phi_\alpha(\beta)$ anche per alcuni ordinali α non numerabili.

Definizione 26. (BACHMANN [50]). Sia Ω il primo ordinale non numerabile:

$$\phi_0(\beta) = \omega^\beta$$

$$\phi_{\alpha+1}(\beta) = \text{il } \beta\text{-esimo punto fisso di } \phi_\alpha$$

$$\phi_\alpha(\beta) = \begin{cases} \sup_{x \in \omega} \phi_{\alpha_x}(\beta) & \text{se cofinalità } \alpha = \omega \\ \phi_{\alpha_\beta}(0) & \text{se cofinalità } \alpha = \Omega. \end{cases} \quad \square$$

Naturalmente, $\phi_\alpha(\beta)$ é definito per α limite solo quando ci sono delle sequenze fondamentali per α (di lunghezza ω o Ω, a seconda della cofinalità di α). Ogni ordinale $\alpha \neq 0$ ha una espansione unica in base Ω del tipo

$$\alpha = \Omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \ldots + \Omega^{\beta_n} \cdot \gamma_n$$

con $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ numerabili e $\beta_1 > \ldots > \beta_n$ (la forma normale di

Cantor in base Ω). Inoltre, per definizione $\varepsilon_{\Omega+1}$ é il minimo ordinale α tale che $\Omega^\alpha = \alpha$ (il primo ε-numero maggiore di Ω). Quindi se $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ allora nell'espansione precedente si ha $\alpha > \beta_1$ e tale espansione può essere usata in definizioni induttive. Ogni ordinale limite $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ si può scrivere in modo unico in una delle seguenti forme:

$$\alpha = \Omega^{\gamma+1}(\beta+1) \quad \text{o} \quad \alpha = \Omega^{\gamma+1}(\beta+\delta),\ \delta \text{ limite}$$

$$\alpha = \Omega^{\gamma}(\beta+1) \quad \text{o} \quad \alpha = \Omega^{\gamma}(\beta+\delta),\ \gamma \text{ e } \delta \text{ limiti}$$

con $\gamma < \alpha$ e δ numerabili. Seguendo HOWARD [72] abbiamo dunque le seguenti sequenze fondamentali per

$$\alpha = \Omega^{\gamma+1}: \qquad \alpha_\sigma = \Omega^\gamma \cdot \sigma$$

$$\alpha = \Omega^{\gamma},\ \gamma \text{ limite}: \qquad \begin{cases} \alpha_x = \Omega^{\gamma_x} & \text{se } \mathrm{cof}\gamma = \omega \\ \alpha_\sigma = \Omega^{\gamma_\sigma} & \text{se } \mathrm{cof}\gamma = \Omega \end{cases}$$

$$\alpha = \Omega^{\gamma}\cdot\delta,\ \delta \text{ limite}: \qquad \alpha_x = \Omega^\gamma \cdot \delta_x$$

$$\alpha = \gamma+\beta,\ \beta \text{ limite}: \qquad \begin{cases} \alpha_x = \gamma+\beta_x & \text{se } \mathrm{cof}\beta = \omega \\ \alpha_\sigma = \gamma+\beta_\sigma & \text{se } \mathrm{cof}\beta = \Omega \end{cases}$$

Questo introduce le sequenze fondamentali per alcuni (ma non tutti gli) ordinali limiti non numerabili minori di $\varepsilon_{\Omega+1}$. E queste sequenze fondamentali possono essere usate per definire sequenze fondamentali per tutti gli ordinali limiti $\alpha < \phi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)$. Precisamente esse sono quelle già viste dopo la definizione 16 (scrivendo in generale $\phi_{\gamma+1}$ al posto di ϕ_{n+1}), più le sequenti:

$$\alpha = \phi_\gamma(\beta),\ \mathrm{cof}\gamma = \omega: \qquad \alpha_x = \phi_{\gamma_x}(\beta)$$

$$\alpha = \phi_\gamma(\beta),\ \mathrm{cof}\gamma = \Omega: \qquad \alpha_\beta = \phi_{\gamma_\beta}(0)$$

$$\alpha = \phi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0): \qquad \alpha_x = \phi_{\Omega(x)}(0)$$

dove

$$\Omega(x) = \Omega^{\Omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\Omega}}}}} \Big\}\ x+1 \text{ volte.}$$

Questo permette di definire f_α per $\alpha < \phi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)$, e si estende il teorema 17 nel seguente:

Teorema 27. (GIRARD [81]).

(a) per ogni ordinale limite $\alpha < \varepsilon_0$, sia $D(\alpha)$ l'ordinale ottenuto scrivendo α in pura base ω e poi sostituendo ω con Ω ovunque. Allora $h_\alpha \equiv_{\&} f_{\phi_{D(\alpha)}(\omega)}$.

(b) $h_{\varepsilon_0} \equiv_{\&} f_{\phi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)}$.

Dimostrazione. Se

$$H_0(x,y) = x^y$$
$$H_{\alpha+1}(x,0) = H_\alpha^{(x)}(x,0)$$
$$H_{\alpha+1}(x,y+1) = H_\alpha^{(x)}(x,H_{\alpha+1}(x,y)+1)$$
$$H_\alpha(x,y) = H_{\alpha_y}(x,0) \qquad (\alpha \text{ limite})$$

e

$$F_0(x,y) = x^y$$
$$F_{\alpha+1}(x,0) = F_\alpha^{(x)}(x,0)$$
$$F_{\alpha+1}(x,y+1) = F_\alpha^{(x)}(x,F_{\alpha+1}(x,y)+1)$$
$$F_\alpha(x,y) = F_{\alpha_x}(x,y) \qquad \mathrm{cof}\alpha = \omega$$
$$F_\alpha(x,y) = F_{\alpha_y}(x,0) \qquad \mathrm{cof}\alpha = \Omega$$

allora

$$H_\alpha(x,y) = F_{D(\alpha)}(x,y)$$

Inoltre

$$F_{\phi_\alpha(\beta)}(x) = F_\alpha(x,f_\beta(x))$$

e quindi

$$H_\alpha(x,x) = f_{\phi_{D(\alpha)}(\omega)}(x).$$

Ma H_α ed h_α sono elementarmente equivalenti per α limite. □

CONCLUSIONE

Per estendere ulteriormente la classe delle funzioni ε_0-ricorsive, si possono considerare ordinali γ più grandi di ε_0, per cui ci siano sistemi di notazioni sufficientemente naturali. Questo permetterà di definire la classe delle funzioni γ-ricorsive, la sequenza $\{h_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ e la gerarchia $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$. Con alcune condizioni sul sistema di notazioni scelto per la γ-ricorsione, si avranno connessioni fra queste nozioni analoghe a quelle espresse dai teoremi 23 e 25. Si vedano LÖW-WAINER [70] e SCHMIDT [76].

Un altro metodo di estensione consiste nel considerare sistemi formali per l'aritmerica più potenti di PA e le funzioni provabilmente totali in essi. Sotto condizioni abbastanza generali (KINO [68]), tali funzioni saranno esattamente le funzioni γ-ricorsive, dove γ é il più piccolo ordinale per cui non esistano buon ordini di tale lunghezza, di cui si possa provare il buon ordinamento all'interno del sistema formale.

A questo punto l'attenzione si sposta dunque sulla teoria della dimostrazione, perché nel primo caso si tratta di trovare sistemi di notazioni naturali per grandi ordinali, nel secondo di caratterizzare la potenza ordinale di un sistema formale (il che normalmente é un sottoprodotto delle dimostrazioni di consistenza). Si vedano ad esempio SCHÜTTE [77] e BUCHNOLZ-FEFERMAN-POHLERS-SIEG [81] per un gran numero di risultati in queste direzioni.

E' possibile estendere sufficientemente tali metodi, così da ottenere una analisi esaustiva delle funzioni ricorsive? Noi pensiamo di no. Il continuo costruttivo si dimostra irraggiungibile come il continuo classico: entrambi vengono generati mediante principi estremamente potenti (l'operazione di ricerca illimitata in un caso, l'assioma potenza nell'altro) che a posteriori risultano essere non analizzabili in termini più semplici (di costruzione dal basso). Per quanto riguarda le funzioni ricorsive, almeno tre diverse argomentazioni sostengono tale asserzione.

Anzitutto, il processo di costruzione della gerarchia transfinita di Grzegorczyk ha un naturale esaurimento. Infatti la definizione di $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ si riduce alla definizione di $\{h_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ e questo a sua volta si riduce alla definizione di un sistema di notazione per α_0. Perché la gerarchia si possa pensare come costruita dal basso, si deve poter pensare che il sistema di notazioni per l'ordinale α sia stato ottenuto prima della definizione di f_α (cioé dello stadio α). Ora il sistema di notazione per α é fedelmente rappresentato da f_α: la condizione che si impone naturalmente é dunque che f_α stia in $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{E}_\beta$. Poiché f_α é elementarmente onesta (cioé computabile in tempo elementare in f_α), essa é elementare in ogni funzione che la maggiori (per la dimostrazione del teorema 3). Quindi h_α é definita in modo naturale solo se maggiora f_α. Un'estensione del teorema 27 (provata da Wainer) prova che se si pone $\Omega_1 = \Omega$ ed Ω_{n+1} = il minimo ordinale di cardinalità maggiore della cardinalità di Ω_n, allora

$$h_{\phi_{\varepsilon_{\Omega_n+1}}}(0) \equiv_{\mathcal{E}} f_{\phi_{\varepsilon_{\Omega_{n+1}+1}}}(0).$$

Per uniformità, se $\Omega_\omega = \sup_{n\in\omega} \Omega_n$ e $\phi_{\Omega_\omega}(0) = \sup_{n\in\omega} \phi_{\varepsilon_{\Omega_n}+1}(0)$,

$$h_{\phi_{\Omega_\omega}}(0) \equiv_{\mathcal{E}} f_{\phi_{\Omega_\omega}}(0)$$

e quindi $\phi_{\Omega_\omega}(0)$ é il punto oltre il quale la gerarchia di Grzegorczyck cessa di poter essere pensata come costruita dal basso.

Ponendosi comunque nella prospettiva più generale della teoria della complessità nel senso di BLUM [67], si consideri una qualunque gerarchia lineare di classi di complessità rispetto ad una qualunque misura (ad esempio tali sono le $\mathcal{E}_\alpha$ per $\alpha < \varepsilon_0$, rispetto alle misure di tempo e di spazio). Se tale gerarchia é ottenuta prendendo unioni a stadi limiti e mediante un operatore monotono ricorsivo a stadi successori, essa non può essere esaustiva (BAASS-YOUNG [73]: l'idea é che essa non può contenere funzioni che siano accellerabili per un fattore maggiore dell'operatore che genera la gerarchia).

Infine, una modificazione del teorema dell'unione di classi di complessità (MEYER-MCCREIGHT [69]) ci dice che l'unione di una successione crescente di classi di complessità (i cui nomi siano uniformemente ricorsivi) indiciata da ordinali minori di un ordinale ricorsivo é ancora una classe di complessità. Essa non può quindi essere esaustiva (ad esempio per il teorema di compressione di BLUM [67]). Dunque ogni gerarchia esaustiva dovrebbe avere lunghezza almeno ω_1^{ck}: é perciò necessario scegliere un sistema di notazioni per ω_1^{ck}, ad esempio un percorso attraverso $\mathcal{O}$. Ma nello spirito dei teoremi di limitatezza di SPECTOR [55] si può allora provare che nessuna procedura naturale dà gerarchie che siano indipendenti dal percorso (l'idea é che la classe delle funzioni ricorsive é iperaritmetica). In pratica poi per le gerarchie note l'unicità viene meno molto presto,

già ai livelli di ω o ω^2 (vedi ed esempio AXT [59], KREISEL [60], FEFERMAN [62], BAASS-YOUNG [73]).

Questi risultati, di natura diversa, fanno ritenere che una gerarchia naturale ed esaustiva per le funzioni ricorsive non esista. Il continuo costruttivo ci si presenta dunque come una totalità potenziale, la cui conoscenza può solo essere arbitrariamente approssimata ma non esaurita. Il che ci conforta, se non come matematici, almeno come autori di una incompleta esposizione.

BIBLIOGRAFIA

ACKERMANN [28]: Zum Hilbertschen aufban der reellen Zahlen, Math. Ann. 9 (1928) 118-133.

AXT [59]: On a subrecursive hierarchy and primitive recursive degrees, Trans. Am. Math. Soc. 92 (1959) 85-105.

____ [65]: Iteration of primitive recursion, Zeit. Math. Log. Grund. M. 11 (1965) 253-255.

BAASS-YOUNG [73]: Ordinal hierarchies and naming complexity classes, J. Ass. Comp. Mach. 20 (1973) 668-686.

BACHMANN [50]: Die nermalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, Viert. Nat. Ges. Zürich 95 (1950) 115-147.

BERECZKI [52]: Lösung eines Markovschen Problems betreffs einer Ausdehnung des Begriffes der elementaren Funktion, Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952) 197-218.

BLUM [67]: A machine indipendent theory of the complexity of recursive functions, J. Ass. Comp. Mach. 14 (1967) 322-336.

BUCHHOLZ-FEFERMAN-POHLERS-SIEG [81]: Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: recent proof-theoretical studies, Springer Lect. Notes Math. 897 (1981).

CICHON [83]: A short proof of two recently discovered independence results using recursion-theoretical mathods, Proc. Am. Math. Soc. 87 (1983) 704-706.

COBHAM [64]: The intrinsic computational difficulty of functions, Log. Math. Phil. Sci. 2 (1964) 24-30.

CONSTABLE [70]: On the size of programs in subrecursive formalism, ACM Symp. 2 (1970) 1-9.

DEDEKIND [88]: Was Sind und was Sollen die Zahlen? Brunswick 1888.

FEFERMAN [62]: Classification of recursive functions by means of hierarchies, Trans. Am. Math. Soc. 104 (1962) 101-122.

________ [68]: Systems of predicative analysis II, J. Symb. Log. 33 (1968) 193-220.

GIRARD [81]: Π^1_2-logic, part I, Ann. Math. Log. 21 (1981) 75-219.

GÖDEL [58]: Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des Finiten Standpunktes, Dialectica 12 (1958) 280-287.

GRZEGORCZYCK [53]: Some classes of recursive functions, Roszprawy Math. 4 (1953) 1-45.

HEINERMANN [61]: Untersuchungen über die Rekursion-zahlen rekursiver Funktionen, Dissertation Münster 1961.

HILBERT-BERNAYS [39]: Grundlagen der Matematik, vol. 2, Berlin 1939.

HOWARD [72]: A system of abstract constructive ordinals, J. Synmb. Log. 37 (1972) 355-374.

KALMAR [43]: Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem, Mat. Phis. Lapok 50 (1943) 1-23.

KETONEN-SOLOVAY [81]: Rapidly growing Ramsey functions, Ann. of Math. 113 (1981) 267-314.

KINO [68]: On provably recursive functions and ordinal recursive functions, J. Math. Soc. Japan 20 (1968) 456-476.

KIRBY-PARIS [82]: Accessible independence results for PA, Bull. London Math. Soc. 14 (1982) 285-293.

KLEENE [36]: General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. 112 (1936) 727-742.

______ [36a]: A note on recursive functions, Bull. Am. Math. Soc. 42 (1936) 544-546.

KREISEL [52]: On the interpretation of non-finitist proofs II, J. Symb. Log. 17 (1952) 43-58.

_______ [58]: Mathematical significance of consistency proofs, J. Symb. Log. 23 (1958) 155-182.

_______ [59]: Inessential extensions of Heyting's arithmetic by means of functionals of finite types, J. Symb. Log. 24 (1959) 284.

_______ [60]: Non uniqueness results for transfinite progressions, Bull. Ac. Pol. Sci. 5 (1960) 287-290.

LÖB-WAINER [70]: Hierarchies of number theoretic functions, Archiv Math. Log. 13 (1970) 39-51 e 97-113.

MEYER [65]: Depth of nesting and Grzegorczyck hierarchy, Notices Am. Math. Soc. 12 (1965) 342.

MEYER-MCCREIGHT [69]: Classes of computable functions defined by bounds of computations, ACM Symp. 1 (1967) 79-88.

MEYER-RITCHIE [67]: The complexity of loop programs, Proc. ACM Conf. 22 (1967) 465-469.

MYHILL [53]: A stumbling block in constructive mathematics, J. Symb. Log. 18 (1953) 190-191.

ODIFREDDI [?]: Classical recursion theory, Springer-Verlag, in preparazione.

PARIS HARRINGTON [77]: A mathematical incompleteness in PA, Handbook of Mathematical Logic, Noth-Holland (1977) 1133-1142.

PETER [34]: Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Ann. 110 (1934) 612-632.

_____ [35]: Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, Math. Ann. 111 (1935) 42-60.

_____ [36]: Über die mehrfache Rekursion, Math. Ann. 113 (1936) 489-527.

_____ [51]: Rekursive Funktionen, Akademiai Kiado, Budapest 1951 [trad. inglese Academic Press, 1967].

RITCHIE [63]: Classes of predictably computable functions, Trans. Am. Math. Soc. 106 (1963) 139-173.

ROBBIN [65]: Subrecursive hierarchies, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1965.

ROBINSON R. [47]: Primitive recursive functions, Bull. Am. Math. Soc. 53 (1947) 925-942.

_____ [48]: Recursion and double recursion, Bull. Am. Math. Soc. 54 (1948) 987-993.

SCHMIDT [76]: Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number-theoretic functions, Archiv Math. Log. 18 (1976) 47-53.

SCHUTTE [77]: Proof Theory, Springer-Verlag 1977.

SCHWICHTENBERG [71]: Eine Klassifikation der ε_0-rekursiven funktionen, Zeit. Math. Log. Grund. M. 17 (1971) 61-74.

SKOLEM [23]: Begründung der elementaren Arithmetik, Viden. Skr. Math. Kl. 6 (1923) 1-38.

SPECTOR [55]: Recursive well-orderings, J. Symb. Log. 20 (1955) 151-163.

SUDAN [27]: Sur le nombre transfini ω^{ω}, Bull. Soc. Roum. Sci. 30 (1927) 11-30.

TAIT [59]: A characterization of ordinal recursive functions J. Symb. Log. 24 (1959) 325.

_____ [61]: Nested recursion, Math. Ann. 143 (1961) 236-250.

VEBLEN [08]: Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908) 280-292.

WAINER [70]: A classification of the ordinal recursive functions, Arch. Math. Log. 13 (1970) 136-153.

_____ [72]: Ordinal recursion, and a refinement of the extended Grzegorczyck hierarchy, J. Symb. Log. 37 (1977) 281-292.