

Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28
aprile 1984.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

Non ritengo necessario polemizzare sul titolo, dato che le mie posizioni sono ben conosciute, anche se, credo, ritenute, nella migliore delle ipotesi, "stravaganti".

Parlerò invece brevemente di alcuni problemi (risolti o non risolti) che io ritengo centrali in Matematica e che hanno, a mio avviso, interesse notevole sia per il logico matematico che abbia in prevalenza un orientamento specialistico sia per il logico matematico che invece sia prevalentemente interessato alla metamatematica (intesa in senso lato).

Naturalmente la scelta dei problemi è largamente arbitraria ed influenzata da gusti personali; mi scuso in anticipo anche per le molte dimenticanze non volute. Questo non toglie tuttavia che le questioni delle quali parlerò hanno rappresentato e rappresentano tutt'ora dei punti nodali nella nostra matematica.

Ovviamente, dato il carattere introduttivo del mio discorso, non entrerò nei dettagli tecnici delle questioni, ma mi limiterò a dare gli enunciati e le eventuali soluzioni dei problemi stessi oltre a porre in luce quelli che, secondo me, sono gli aspetti generali e l'impatto su altri settori della matematica e, più in generale, della conoscenza scientifica. Il lettore interessato ad approfondire le questioni trattate è rinviato alla bibliografia.

1. Inizierò il mio discorso con il problema dei quattro colori e con la sua positiva soluzione da parte di Appel e Haken nel 1976.

Dato che il problema è ben conosciuto da tutti limiterò a ricordare l'uso "essenziale" del calcolatore nella soluzione del problema, una volta risolto questo allo studio di un numero finito (precisamente 1936) di mappe. Tale uso del calcolatore ha portato ad un riesame del concetto di dimostrazione in matematica ed anche a varie polemiche. si osservi però che l'uso del calcolatore è ormai

una componente essenziale di alcune dimostrazioni matematiche, sia in teoria dei numeri che in teoria dei gruppi finiti ed in matematica combinatoria.

Schematizzando al massimo, i problemi che sorgono sono i seguenti: è accettabile, al pari di una dimostrazione classica, una dimostrazione che usa in modo "essenziale" il computer?

Dato che anche ogni dimostrazione classica presenta elementi di incertezza, si può utilmente affrontare il problema introducendo concetti probabilistici del tipo: la tale prova rende credibile il tale teorema con probabilità p ?

Entro quali limiti la matematica assomiglia alle scienze sperimentali?

In un futuro prossimo sarà trovata una prova del teorema dei 4 colori di tipo classico (ad esempio, come molti speravano, una prova all'interno della topologia algebrica)?

2. Un gruppo di problemi, dei quali desidero ora brevemente parlare, riguarda sia la teoria dei numeri che la geometria algebrica. Uno di essi è la congettura di Fermat, sulla quale non mi soffermerò. Strettamente connessa con la congettura di Fermat è la congettura di Mordell, formulata nel 1922. Essa si enuncia nel modo seguente sia K un campo di numeri algebrici e γ sia una curva su K , proiettiva e non singolare di genere ≥ 2 . Allora l'insieme dei punti di γ che sono K -razionali (cioè che hanno coordinate in K) è finito. La congettura di Mordell è stata risolta nel 1983 da un giovane matematico tedesco di 29 anni, G. Faltings. Sia ora $K=Q$. Allora la curva di Fermat $F_n = X^n + Y^n + Z^n = 0$ ($n \geq 4$) ha solo un numero finito di soluzioni razionali, quindi interesse (indipendenti).

Possiamo facilmente esprimere questo fatto in PA_1 , con un enunciato α . Ora sappiamo che $N \models \alpha$. Sarà $PA_1 \vdash \alpha$? La questione attualmente allo studio è se sia possibile, utilizzando le tecniche di Faltings, provare che il numero di soluzioni razionali

della curva di Fermat ($n \geq 4$) è addirittura zero. Ciò è stato ottenuto in alcuni casi particolari già noti.

Un altro notevole risultato ottenuto recentemente è il seguente: Il 10° problema di Hilbert è risolubile per l'anello di tutti i numeri interi algebrici.

3. Un risultato molto bello e interessante ottenuto negli ultimi anni è la classificazione completa di tutti i gruppi finiti semplici. Tale risultato, tenuto conto di precedenti risultati sui gruppi finiti semplici, è stato ottenuto provando che esista soltanto un numero finito di gruppi semplici sporadici. Oltre alla bellezza ed all'interesse strettamente matematico del risultato, desidero far presente alcuni aspetti più generali.

a) E' possibile caratterizzare, almeno parzialmente, i modelli infiniti della teoria elementare della classe dei gruppi finiti semplici? Che relazione esiste tra tale teoria e la teoria elementare della classe dei gruppi finiti?

b) Il risultato esposto ha portato alla soluzione di alcuni problemi di teoria classica dei modelli, ad esempio:

b₁) Gli unici gruppi semplici N_0 -categorici sono i gruppi semplici finiti.

b₂) Nessuna teoria N_0 -categorica ed ω -stabile è finitamente assiomatizzabile;

Credo che appaia di nuovo chiaro il legame esistente fra i vari settori della matematica: fra questi settori c'è la logica matematica, la quale sta pienamente dimostrando la sua raggiunta maturità, non solo per i risultati specifici ottenuti ma anche per le sue connessioni ormai solide con il resto della matematica⁽¹⁾.

4. Il prossimo argomento che voglio trattare è la congettura di Vaught.

Sia T una teoria $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ completa, con modelli infiniti, in un linguaggio contabile. Denotiamo con $I(k, T)$ il numero dei modelli non isomorfi di T , aventi cardinalità k ($\geq \aleph_0$). Esisterà una T tale che $I(\aleph_0, T) = \aleph_1$ oppure (congettura di Vaught) per ogni T , se $I(\aleph_0, T) > \aleph_0$, allora $I(\aleph_0, T) = 2^{\aleph_0}$?

Un primo passo nella soluzione della congettura è stato fatto da M. Morley: se $I(\aleph_0, T) > \aleph_1$, allora $I(\aleph_0, T) = 2^{\aleph_0}$: (ricordo che la situazione, per quanto concerne $I(\aleph_0, T)$ fino ad \aleph_0 , è la seguente: per ogni $n > 0$, $n \neq 2$, esiste una teoria T tale che $I(\aleph_0, T) = n$ ed esistono teorie T tali che $I(\aleph_0, T) = \aleph_0$).

Recentemente S. Shelah (padre fondatore di quel recente ma ricco e profondo settore della teoria dei modelli che è la teoria della stabilità) ha risolto la congettura per T ω -stabile.

(Ricordo che T si dice ω -stabile se, per ogni $\mathcal{A} \models T$, $|S_1(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$, dove $S_1(\mathcal{A})$ indica lo spazio degli 1-tipi su \mathcal{A}).

Successivamente J. Saffe ha risolto la congettura anche per teorie superstabili. (Ricordo che T si dice superstabile se, per ogni $\mathcal{A} \models T$, $|\mathcal{A}| \geq 2^{\aleph_0}$, $|S_1(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$.) La congettura resta aperta negli altri casi (T stabile non superstabile e T instabile).

Desidero ora accennare brevemente alle congetture di Martin:

Sia T una teoria completa contabile, con modelli infiniti, in $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ e sia $L_1(T)$ il più piccolo frammento di $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ contenente $\mathcal{L}_{\omega\omega} \cup \{ \bigwedge_{\bar{x} \in P} \Phi(\bar{x}) : p \in S_n(T), n < \omega \}$.

Se $\mathcal{A} \models T$, sia $T_1(\mathcal{A})$ la teoria di \mathcal{A} in $L_1(T)$. Allora la congettura di Martin dice che:

se $I(\aleph_0, T) < 2^{\aleph_0}$ allora $T_1(\mathcal{A})$ è \aleph_0 -categorica per ogni $\mathcal{A} \models T$, $|\mathcal{A}| = \aleph_0$.

La congettura di Martin implica facilmente la congettura di Vaught.

La congettura forte di Martin dice che: vale la congettura di Martin ed in più, se $I(\aleph_0, T) = 2^{\aleph_0}$, allora T ha 2^{\aleph_0} distinti

completamenti in $L_1(T)$.

Desidero infine parlare della ipotesi di Riemann (RH) e di alcune sue conseguenze.

L'ipotesi di Riemann rimane, a mio avviso uno dei più centrali problemi aperti in una matematica classica, dato anche il suo significato in teoria dei numeri (valutazione asintotica della funzione che dà la distribuzione dei numeri primi).

Si consideri la funzione $\zeta(s)$ definita, nel semipiano $\text{Re}(s) > 1$, dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Tale funzione ammette una "continuazione" meromorfa all'intero piano complesso, che indicheremo ancora con $\zeta(s)$.

Si ha:

$\zeta(s) \neq 0$, se $\text{Re}(s) \geq 1$.

$\zeta(s) \neq 0$, se $\text{Re}(s) \leq 0$, salvo i punti $s = -2, -4, -6, \dots$, detti zeri banali di $\zeta(s)$.

$\zeta(s) < 0$, se s reale e $0 < s < 1$.

Gli zeri non banali della ζ sono quindi tutti entro la striscia critica $0 < \text{Re}(s) < 1$.

Ora RH dice che gli zeri non banali di ζ sono tutti sulla retta critica $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$. (E' stato provato da Hardy nel 1915 che ζ ha infiniti zeri sulla retta critica).

Ricordo che RH è esprimibile nel linguaggio di PA_1 , ad esempio dall'enunciato:

$$\forall z \geq 1 \exists x \forall y [y > x \rightarrow (\sum_{n=1}^y \mu(n))^{2z} < y],$$

dove μ è la funzione di Moebius.

Abbiamo allora: $ZFC \vdash RH?$ $PA_1 \vdash RH?$

L'interesse della ipotesi di Riemann per un logico matematico è dato anche dai suoi legami con un altro importante problema non risolto: $P=NP?$

Detto Co-NP l'insieme $\{X : \neg X \in NP\}$ abbiamo:

$$P \subseteq NP \cap \text{Co-NP}.$$

Ora è noto che se Pr denota l'insieme dei numeri primi, si ha $Pr \in NP \cap Co-NP$. Miller (1976) ha provato che l'ipotesi estesa di Riemann (ERH) implica che $Pr \in P$. (L'ipotesi estesa di Riemann concerne gli zeri nella striscia critica delle funzioni meromorfe ottenute per continuazione da serie tipo $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, dove le χ sono certe funzioni aritmetiche dette "caratteri", ed afferma che tali zeri sono tutti sulla retta $Re(s) = \frac{1}{2}$).

NOTA

- (1) Desidero anche ricordare, nel campo delle classificazioni modulo isomorfismo di classi di strutture, l'importante risultato di Ketonen (di interesse sia algebrico che logico) del 1978, cioè la classificazione completa, a meno di isomorfismi, delle algebre di Boole contabili.

BIBLIOGRAFIA

1. EDWARDS, "Riemann's zeta-function", Academic Press, N.Y. 1974.
2. G.FALTINGS, "Edlichkeitssätze für abelsche Varietäten (über Zahlkörpern)" *Inventiones Mathematicae* 73 (3) '83.
3. D.GORENSTEIN, "The classification of finite simple groups", In: *Proceed. of Int. Congress. of Mathematicians*, Helsinki 1978; Helsinki 1980.
4. D.GORENSTEIN, "Finite simple groups: an introduction to their classification", N.Y. 1982.
5. HARDY & WRIGHT, "An introduction to Theory of Numbers", Fifth edition, Oxford 1979.
6. J.KETONEN, "The structure of countable Boolean Algebras" *Annals of Math.* 108 (1978).
7. Y.MANIN, "A course in Mathematical Logic", Springer Verlag, 1977.
8. G.MILLER, "Riemann's Hypothesis and tests for Primality", *Journal of Computer and System Sciences*, 13 (1976).

9. P.RIBENBOI, "13 lectures on Fermat's Last Theorem", Springer Verlag, 1979.
10. J.SAFFE, "On Vaught's conjecture for superstable theories", Preprint.
11. SHELAH, HARRINGTON & MAKKAI, "A proof of Vaught conjecture for ω -stable theories", Preprint.
12. Per il problema dei 4 colori e per alcune idee nel merito delle questioni da esso sollevate consultare:
 - *Publications Math. de Lyon*, 16 (3/4) '79,
 - *American Math. Monthly* 87 (9) '80 e relative bibliografie.
13. Per $N=NP$ consultare:
 - *American Math. Monthly* 90 (2) '83 e relativa bibliografia.