Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

S.Ghilardi, G.C.Meloni, C.Piersantini

ALCUNI RISULTATI SULLE LOGICHE INTERMEDIE PROPOSIZIONALI

Si mostra che l'algebra dei crivelli di un ordine verifica la condizione di Kreisel-Putnam KP) [1] se e solo se detto ordine soddisfa una opportuna proprietà "elementare" P). Si dimostra poi che lo spettro primo di ogni algebra di Heyting che verifica KP) soddisfa P), fornendo così un teorema di rappresentazione.

Usando la usuale terminologia logica, ciò significa che:

1) la logica KP) è valida negli ordini che soddisfano P),

2) se per un ordine sussiste il teorema di validità per la logica KP) allora tale ordine soddisfa P),

3) per ogni teoria proposizionale intuizionista in cui è dimostrabile lo schema KP) (formulata in un linguaggio di cardinalità arbitraria e avente un insieme arbitrario di assiomi) vale il teorema di completezza rispetto agli ordini che soddisfano P).

Si noti che l'analisi di Gabbay [2] [3] si limita alla logica KP) pura.

Un discorso completamente analogo è svolto per una famiglia di varianti della logica di Kreisel-Putnam, definita per ogni intero $n \geqslant 2$ dalla condizione [4]

$$KP)_n \quad (\neg x \to \neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n) \vdash (\neg x \to \neg x_1) \vee \ldots \vee (\neg x \to \neg x_n),$$

relativamente alla quale viene introdotta una proprietà "elementare" $P)_n$.

Si mostra poi come gli ordini che soddisfano rispettivamente le condizioni P) e $P)_n$ siano "amalgamabili" in modo da fornire una dimostrazione semantica della primalità delle logiche pure KP) e $KP)_n$.

Si presenta infine un teorema che caratterizza, rispetto ad un linguaggio fissato, le teorie prime in termini di loro possibili presentazioni. Di tale teorema si fornisce sia una dimostrazione semantica basata sui modelli di Kripke, sia una dimostrazione sintattica in termini del concetto di "forte dimostrabilità" [5].

1. Sia $< S , \sqsubseteq >$ un ordine, ossia un insieme munito di una relazione binaria riflessiva e transitiva, e sia $\mathcal{C}$ l'algebra di Heyting dei suoi crivelli (un crivello è un $C \subseteq S$ tale che $\alpha \in C$ e $\beta \sqsubseteq \alpha$ implicano $\beta \in C$) .

PROPOSIZIONE. L'algebra di Heyting $\mathcal{C}$ verifica

$$KP) \quad \forall A,B,C \in \mathcal{C} \quad (\neg A \to B \vee C) \leq (\neg A \to B) \cup (\neg A \to C)$$

se e solo se $< S , \sqsubseteq >$ soddisfa la proprietà del primo ordine

P) $\forall\alpha\ \forall\beta\sqsubseteq\alpha\ \forall\gamma\sqsubseteq\alpha\ \exists\delta\sqsubseteq\alpha(\beta\sqsubseteq\delta \text{ e } \gamma\sqsubseteq\delta \text{ e } \forall\varepsilon\sqsubseteq\delta\ \exists\eta\sqsubseteq\varepsilon(\eta\sqsubseteq\beta \text{ e } \eta\sqsubseteq\gamma))$.

Nel corso della dimostrazione la condizione del secondo ordine KP) viene ridotta al primo ordine sostituendo a B ed a C i crivelli massimi che soddisfano opportune condizioni e, dualmente, a $\neg A$ un opportuno crivello negato minimo .

Per insiemi ordinati finiti la P) è equivalente alla condizione di Gabbay [3][4], ma, per insiemi infiniti, in generale vale solo che la condizione di Gabbay implica P) .

TEOREMA. Se H è un'algebra di Heyting, ossia è una teoria proposizionale intuizionista (in forma invariante rispetto alle possibili presentazioni), che soddisfa

KP) $\forall x,y,z\in H \quad (\neg x \to y \vee z) \vdash (\neg x \to y) \vee (\neg x \to z)$

allora $<\text{spec } H, \supseteq>$, ossia l'ordine base del modello canonico di Stone-Kripke, formato dai filtri primi, soddisfa la condizione P) .

Dimostrazione. Se α, β, γ sono filtri primi tali che $\beta\supseteq\alpha$ e $\gamma\supseteq\alpha$ allora il filtro generato da

$$\alpha \cup \{\neg x \mid \neg x \in \beta\cap\gamma\}$$

è un filtro primo, in quanto in H vale KP), e inoltre soddisfa la proprietà richiesta per δ in P) .

2. In analogia al punto precedente si ha, per $n \geqslant 2$, la seguente

PROPOSIZIONE. L'algebra $\mathcal{C}$ dei crivelli di un ordine $<S, \sqsubseteq>$ soddisfa

KP)$_n$ $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C} \quad (\neg A \to \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n) \vdash (\neg A \to \neg A_1) \vee \dots \vee (\neg A \to \neg A_n)$

se e solo se $<S, \sqsubseteq>$ soddisfa la seguente proprietà del primo ordine

P)$_n$ $\forall\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n}(\gamma_i\sqsubseteq\beta_i\sqsubseteq\alpha) \Rightarrow \exists\delta\sqsubseteq\alpha\Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\exists\delta_i\sqsubseteq\delta(\delta_i\sqsubseteq\gamma_i)\Big) \text{ e } \forall\varepsilon\sqsubseteq\delta\ \exists\eta\sqsubseteq\varepsilon\Big(\bigvee_{i=1}^{n}\eta\sqsubseteq\beta_i\Big)\Big]\Big)$.

Questa volta il secondo ordine di KP)$_n$ si ridu ce al primo ordine considerando il minimo dei $\neg A$ e degli A_i che soddisfa opportune condizioni .

TEOREMA. Se H è un'algebra di Heyting che soddisfa

$$\mathrm{KP})_n \quad \forall x, x_1, \ldots, x_n \in H \; (\neg x \to \neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n) \vdash (\neg x \to \neg x_1) \vee \ldots \vee (\neg x \to \neg x_n)$$

allora $<\mathrm{spec}\, H, \geq>$ soddisfa $\mathrm{P})_n$.

Dimostrazione. Se $\gamma_i \geq \beta_i \geq \alpha$ sono filtri primi, si mostra che la condizione su δ richiesta da $\mathrm{P})_n$ equivale ad avere intersezione vuota con $X := \bigsqcup_{i=1}^{n} \neg \gamma_i$ e a contenere $Y := \alpha \cup (N \cap \prod_{i=1}^{n} \beta_i)$, dove $\neg \gamma_i = \{\neg x \mid x \in \gamma_i\}$ e $N = \{\neg x \mid x \in H\}$.
L'esistenza di un tale filtro primo δ segue allora dal lemma di estensione a patto di mostrare che l'ideale generato da X ha intersezione vuota col filtro generato da Y, cosa che si dimostra usando la proprietà $\mathrm{KP})_n$.

3. Per dimostrare semanticamente la primalità della logica KP) pura, basta, dati due ordini $<S_1, \sqsubseteq_1>$ e $<S_2, \sqsubseteq_2>$ che soddisfano P), costruire un nuovo ordine $<S, \sqsubseteq>$ che soddisfa P) e del quale S_1 e S_2 siano dei crivelli .

Lo stesso per $\mathrm{KP})_n$ rispetto a $\mathrm{P})_n$.

In entrambi i casi una costruzione di $<S, \sqsubseteq>$ che fa al caso nostro è la seguente

$$S := S_1 \amalg S_2 \amalg (S_1 \times S_2)$$

$$\begin{aligned}
\alpha \sqsubseteq \beta :\Longleftrightarrow\ & (\alpha, \beta \in S_1 \text{ e } \alpha \sqsubseteq_1 \beta) \ \bullet \\
& (\alpha, \beta \in S_2 \text{ e } \alpha \sqsubseteq_2 \beta) \ \bullet \\
& (\alpha \in S_1 \text{ e } \beta = <\beta_1, \beta_2> \in S_1 \times S_2 \text{ e } \\
& \quad \alpha \sqsubseteq_1 \beta_1) \ \bullet \\
& (\alpha \in S_2 \text{ e } \beta = <\beta_1, \beta_2> \in S_1 \times S_2 \text{ e } \\
& \quad \alpha \sqsubseteq_2 \beta_2) \ \bullet \\
& (\alpha = <\alpha_1, \alpha_2> \in S_1 \times S_2 \text{ e } \beta = <\beta_1, \beta_2> \\
& \quad \in S_1 \times S_2 \text{ e } \alpha_1 \sqsubseteq_1 \beta_1 \text{ e } \alpha_2 \sqsubseteq_2 \beta_2)
\end{aligned}$$

che si può vedere "fisicamente" come "l'unione" di due corpi, se gli ordini vengono pensati come corpi nel senso di totalità di sottocorpi muniti della relazione di inclusione .

4. Consideriamo ora un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ avente come connettivi $\wedge$, $\vee$, $\to$, f e dotato di un insieme di cardinalità arbitraria di "lettere" proposizionali .

Da ogni presentazione Γ , di una teoria in $\mathcal{L}$, si possono eliminare: gli assiomi del tipo $A \wedge B$, sostituendoli con A,B; gli assiomi del tipo $A \to B$, con $\Gamma \vdash A$, sostituendoli con B; e gli assiomi del tipo $A \vee B$, con almeno uno dei due disgiunti dimostrabili in Γ , sostituendoli con uno dei disgiunti dimostrabili in Γ . Ne segue che ogni teoria in $\mathcal{L}$ può essere presentata in $\mathcal{L}$ con un insieme di assiomi contenenti solo formule atomiche, implicazioni con antecedente non dimostrabile nella teoria e disgiunzioni con entrambi i disgiunti non dimostrabili nella teoria. Particolarizzando alle teorie prime si ha allora un lato del seguente

TEOREMA. Una teoria di un linguaggio $\mathcal{L}$ è prima se e solo se può essere presentata in $\mathcal{L}$ con un insieme di assiomi formato da lettere proposizionali e

da implicazioni con antecedente non dimostrabile nella teoria .

L'altro lato del teorema si può dimostrare semanticamente con l'uso dei modelli di Kripke. Basta infatti aggiungere un massimo al coprodotto di un contromodello per A, con un contromodello per B, con un contromodello per C, per ogni assioma del tipo $C \to D$. In tal modo si ottiene l'universo di un modello della teoria che falsifica, nel massimo, $A \vee B$.

Una dimostrazione sintattica può essere data, alternativamente, introducendo la relazione di "forte dimostrabilità", in simboli $\Gamma \Vdash A$, definita per induzione su A nel modo seguente [5]

$$\Gamma \Vdash p :\Longleftrightarrow \Gamma \vdash p \quad ; \quad \Gamma \nVdash f \quad ; \quad \Gamma \Vdash A \wedge B :\Longleftrightarrow$$
$$\Gamma \Vdash A \text{ e } \Gamma \Vdash B \quad ; \quad \Gamma \Vdash A \vee B :\Longleftrightarrow \Gamma \Vdash A \text{ o } \Gamma \Vdash B \; ;$$
$$\Gamma \Vdash A \to B :\Longleftrightarrow \Gamma \vdash A \to B \text{ e } (\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash B) \; .$$

Il nome "forte dimostrabilità" si spiega col fatto che, per ogni Γ e ogni A, se $\Gamma \Vdash A$ allora $\Gamma \vdash A$. Il valere dell'implicazione inversa caratterizza le teorie prime, essia Γ è prima se e solo se, per ogni A, $\Gamma \Vdash A$ se e solo se $\Gamma \vdash A$.

Per insiemi Γ , formati da lettere proposizionali e da implicazioni con antecedente non dimostrabile in Γ , si dimostra poi, per induzione sul concetto di dimostrazione intuizionista, che se $\Gamma \vdash A$ allora $\Gamma \Vdash A$, da cui segue che tali Γ sono primi.

Dai ragionamenti svolti per dimostrare il teorema segue che se Γ è formato da formule di Harrop, poichè queste ultime sono sempre intuizionisticamente esprimibili come congiunzioni di formule del tipo $A \to p$ o $A \to f$, allora Γ ha la proprietà della disgiunzione .

Il teorema può essere riformulato rendendolo indipendente dal linguaggio $\mathcal{L}$. A tale scopo basta osservare che ogni lettera proposizionale che occorre come assioma può essere eliminata dal linguaggio sostituendola con il "vero". Si ottiene così il seguente

TEOREMA. Un'algebra di Heyting è prima se e solo

se può essere presentata mediante un insieme di relazioni del tipo $x \precsim y$ con $x \not\precsim 1$, essendo $\simeq$ la congruenza generata dalle relazioni assegnate .

I risultati esposti in questo punto si estendono, usando i sequenti in luogo dell'implicazione, ai reticoli distributivi eventualmente dotati di negazione intuizionista .

BIBLIOGRAFIA

[1] G.Kreisel - H.Putnam, Eine Unableitbarkeitsbeweismethode fur den intuitionistischen Aussagenkalkul, Archiv fur Mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 3 (1957) pp . 74 - 78

[2] D.Gabbay, The decidability of the Kreisel-Putnam system, The Journal of Symbolic Logic, vol. 35 n° 3 Sept.(1970) pp . 431 - 37

[3] D.Gabbay, Semantical Investigations in Hey-

ting's Intuitionistic Logic, Dordrecht (1981)

[4] Miglioli, Moscato, Ornaghi, Usberti, Semantical Analysis of some (standard and not standard) intermediate propositional constructive logics: maximality and smoothness results (Preprint)

[5] P.Aczel, Saturated intuitionistic theories, in Contributions to mathematical logic, North Holland (1968) pp . 1 - 11