

G. Longo, E. Moggi

Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28
aprile 1984.

Disponibile in rete su <http://www.aialogica.it>

Si introducono i concetti di enumerazione principale e relativa (§2).

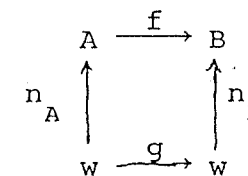
Essi permettono di dare una caratterizzazione elementare della struttura di Ershov (§1), per la Ricorsività nei tipi superiori simile alla definizione dei funzionali Banach-Mazur ([Ro 67]).

§1 Richiami ([Er 75,76]; $w =$ insieme dei numeri naturali)

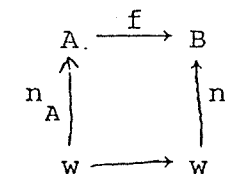
1.1 Def. (EN: categoria delle enumerazioni)

i) $\underline{A} = (A, n_A) \in EN$ (è un insieme numerato)
sse $n_A : w \rightarrow A$ è surgettiva;

ii) $f \in EN(\underline{A}, \underline{B})$ (è un morfismo) sse $\exists g \in R$ (tot. ric.)



iii) $f \in EN_p(\underline{A}, \underline{B})$ (è un morfismo parziale)
sse $\exists g \in PR$ (parz. ric.)



1.2 Def. i) \underline{A} è precompleto sse

$$\forall f \in EN_p(\underline{w}, \underline{A}) \exists g \in EN(\underline{w}, \underline{A}) f = g|_{\text{dom } f};$$

ii) \underline{A} è completo sse

$$\exists a \in A \forall f \in EN_p(\underline{w}, \underline{A}) \exists g \in EN(\underline{w}, \underline{A}) g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in \text{dom } f \\ a & \text{altr.} \end{cases}$$

La nozione di precompletezza è legata ad un analogo del II Teor. di Ricorsione.

1.3 Prop. \underline{A} è precompleto sse

$$\forall f \in EN(\underline{w}, \underline{A}) \exists m \in w f(m) = n_A(m).$$

EN non è cartesianamente chiusa (CCC), tuttavia è cartesiana, perciò ha senso parlare di rappresentazioni dei morfismi. Inoltre esiste una sotto-CCC di EN, la categoria degli f_0 -spazi costruttivi ed r.e. completi; in particolare risulta definita la seguente struttura di tipi:

1.4 Def. (E^K : struttura di Ershov)

$$E_0^K = w;$$

$$E_{\sigma \rightarrow 0}^K = \text{rappresentazione di } EN_p(-x E_{\sigma}^K, \underline{w});$$

$$E_{\sigma \rightarrow \tau}^K = \text{rappresentazione di } EN(-x E_{\sigma}^K, E_{\tau}^K) \quad (\tau \neq 0).$$

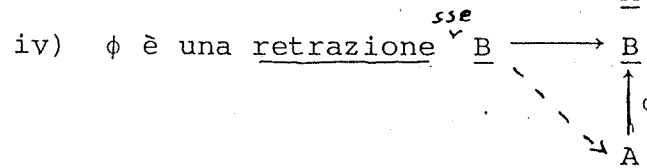
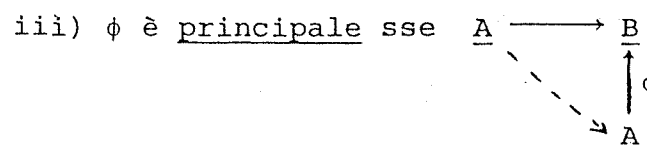
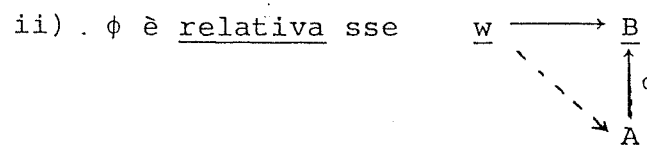
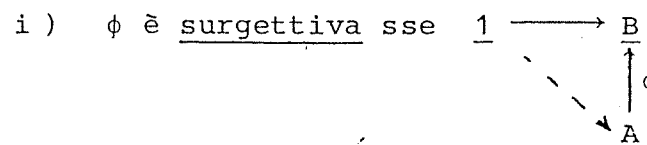
E^K è stata correlata con gli HEO e i funzionali numerabili di Kleene-Kreisel.

§2 Una caratterizzazione elementare di E^K .

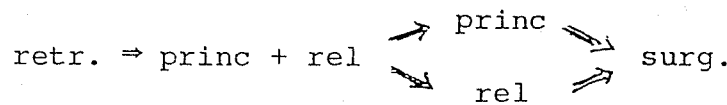
Dati due insiemi numerati \underline{A} e \underline{B} vi sono vari modi di definire una enumerazione di \underline{B} rispetto ad \underline{A} :

(Notazione: nei diagrammi: \rightarrow per ogni, $--\rightarrow$ esiste)

2.1 Def. Sia $\phi \in EN(\underline{A}, \underline{B})$:



Fra queste quattro nozioni sussistono le seguenti relazioni:

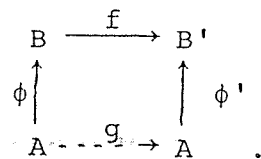


Diamo alcune proprietà delle enumerazioni relative e principali:

2.2 Prop. Sia $\phi \in EN(\underline{A}, \underline{B})$ relativa e

$\phi' \in EN(\underline{A}, \underline{B}')$ principale, allora

$f \in EN(\underline{B}, \underline{B}')$ sse $\exists g \in EN(\underline{A}, \underline{A})$



In altre parole i morfismi non cambiano se si enumera un oggetto \underline{B} di EN, invece che non n_B , con una enum. relativa principale di \underline{B} rispetto ad \underline{A} .

2.3 Prop. Se esiste una enum. relativa di \underline{B} rispetto ad \underline{A} , allora $A: (pre)completo \Rightarrow B (pre)completo$.

2.4 Prop. Se $f, g \in EN(\underline{A}, \underline{B})$ sono principali, allora f è relativa (una retrazione) sse g lo è.

2.5 Lemma. Se $\underline{w} \triangleleft_p \underline{A}$ e \underline{B} è completo, allora esiste una enum. relativa da \underline{A} a \underline{B} .

2.6 Lemma. Se $\underline{A} \times \underline{A} \triangleleft \underline{A}$ ed esiste una enum. surgettiva da \underline{A} a $\underline{B}^{\underline{A}}$ (= rappresentazione di $EN(-x \underline{A}, \underline{B})$), allora esiste una enum. principale da \underline{A} a \underline{B} .

Sulla base dei lemmi precedenti e con semplici considerazioni su E^K si dimostra:

2.7 Teor. $\forall \sigma E_{\sigma}^K \times E_{\sigma}^K \triangleleft E_{\sigma}^K$ e

$\forall \sigma, \tau \neq 0 \exists \phi_{\sigma, \tau} \in EN(E_{\sigma}^K, E_{\tau}^K)$ relativa principale.

Una codifica effettiva delle coppie per E_{σ}^K è un morfismo $\langle, \rangle \in EN(E_{\sigma}^K \times E_{\sigma}^K, E_{\sigma}^K)$ t.c. $\exists p_1, p_2 \in EN(E_{\sigma}^K, E_{\sigma}^K)$ $(p_1 \Delta p_2) \circ \langle, \rangle = id$.

Volendo evitare ogni riferimento ad EN, possiamo de-

finire:

2.8 Def. $\langle, \rangle : A \times A \rightarrow A$ è una codifica accettabile rispetto a $C (\subseteq A \rightarrow A)$ sse

- 1) $\exists p_1, p_2 \in C \forall x_1, x_2 \in A p_i(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_i$
- 2) $\forall f, g \in C \lambda x. \langle fx, gx \rangle \in C$.

Si osservi che \langle, \rangle è una codifica effettiva per E_{σ}^K sse è accettabile rispetto a $E_{\sigma \rightarrow \sigma}^K$.

Grazie a 2.7 e 2.2, possiamo caratterizzare elementarmente E^K ristretta ai tipi interi ($n+1 = n \rightarrow n$):

2.9 Corr. Sia \langle, \rangle una codifica accettabile di E_n^K rispetto ad E_{n+1}^K .

Allora

$$F \in E_{n+2}^K \iff \forall f \in E_{n+1}^K \exists g \in E_{n+1}^K \forall x \in E_n^K$$

$$F(\lambda y. f(\langle x, y \rangle)) = \lambda y. g(\langle x, y \rangle).$$

Osservazione: le enumerazioni $\phi_{\sigma, \tau}$ in 2.7 sono in realtà retrazioni. Infatti (si usi anche 2.4):

$$E_{\sigma \rightarrow \tau}^K \triangleleft E_{\sigma \rightarrow \sigma}^K \triangleleft E_{\sigma' \rightarrow \tau'}^K$$

[Er 75] Ershov Yu. L., "Theoric der Numerierungen II", ZML.

[Er 76] Ershov Yu. L., "Model \mathcal{M} of partial continuous functionals", Logic Colloquium 76 (Gandy, Hyland eds.).

- [Lo 82] Longo G. "Hereditary Partial Effective Functionals in any finite type", Forschungsinstitut f. Math. ETH Zürich.
- [LM 83] Longo G., Moggi E., "The Hereditary Partial Effective Functionals and Recursion Theory in higher types", Nota Scientifica D.I. Università di Pisa, JSL (pross. pubbl.).
- [Ro 67] Rogers H., "Theory of recursive functions and effective computability", Mc Graw-Hill.