LOGICA EFFETTIVA II

POTERE ESPRESSIVO

Antonio Vincenzi

Sia Λ una *macchina effettiva* (v. [**Ga**]) e sia L un vocabolario numerabile contenente un insieme numerabile di simboli costante. Λ é L-*universale* se contiene una appropriata sottomacchina effettiva Λ_s per ogni simbolo $s \in L \cup \{=\}$. Una *struttura effettiva* é una coppia $\mathfrak{A} = \langle \|\mathfrak{A}\|, \Lambda\rangle$ in cui $\|\mathfrak{A}\|$ é una L-struttura ordinaria e contabile ed Λ é una macchina effettiva L-universale costruita a partire dall'universo di $\|\mathfrak{A}\|$. Per cui

struttura effettiva = data type + calcolatore.

Sia stc^e la funzione che associa a ciascuno dei precedenti vocabolari l'insieme $stc^e(L)$ di tutti gli L-enunciati del prim'ordine (in breve, gli L^e-enunciati). Un insieme finito P di L^e-enunciati di base é un *calcolo* relativo ad una struttura effettiva $\mathfrak{A} = \langle \|\mathfrak{A}\|, \Lambda\rangle$ se é contemporaneamente contenuto nel diagramma di $\|\mathfrak{A}\|$ e nell'insieme degli enunciati accettati da Λ. Definendo allora la relazione P *risolve* φ (P calcolo, φ enunciato) come una relazione di *forcing* (v. [**Ke**]), si definisce la relazione $\models^e$ di *effettiva soddisfazione* stabilendo che

$\mathfrak{A} \models^e \varphi$ sse c'é un calcolo P relativo alla struttura $\mathfrak{A}$ che risolve φ.

Sia $\mathcal{E}$ la categoria che ha come oggetti le strutture effettive e come frecce le immersioni isomorfe tra esse. In [Vi] viene allora provato che $\mathfrak{L}^e = \langle \mathcal{E}, stc^e, \models^e \rangle$ é — sostanzialmente — una logica nel senso specificato in [Mu]. Inoltre, nello stesso articolo, si dimostra che $\mathfrak{L}^e$ é una logica $\aleph_0$—compatta che soddisfa le proprietà di Consistenza di Robinson, Interpolazione di Craig, Definibilità di Beth e Δ—chiusura. A questo punto, utilizzando le nozioni introdotte in [Ba] ed i risultati ivi provati, si ottengono i seguenti teoremi.

1. Teorema di omissione dei tipi per $\mathfrak{L}^e$. *Sia* T *un insieme di* L^e*-enunciati. Siano* $t_1, \ldots, t_n$ *alcuni* H^e*-termini chiusi. Sia* $\Sigma_i = \Sigma_i(t_1, \ldots, t_n)$ *un insieme di* $(L \cup H)^e$*-enunciati* $(i < \omega)$. *Sia* $\mathcal{T}$ *un insiene di prova (v.* [Ba, 2.2]*). Supponiamo che*

(1) T *abbia un modello effettivo;*

(2) per ogni $i < \omega$, *per ogni* $\varphi(R) \in \mathcal{T}$, R *simbolo relazione n-ario non in* L, *l'esistenza di un'enunciato effettivo* τ *universalmente valido e tale che* $T \cup \{\varphi(\tau/R)\}$ *ha un modello effettivo implica l'esistenza di un enunciato* $\sigma \in \Sigma_i$ *tale che* $T \cup \{\varphi(\sigma/R)\}$ *ha un modello effettivo.*

Allora

$$T \cup \{\forall x_1 \ldots \forall x_{n_i} \bigvee_{\sigma \in \Sigma_i} \sigma(x_1, \ldots, x_{n_i}) \mid i < \omega\}$$

ha un modello effettivo.

2. Teorema di completezza per $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$. *Sia* $\mathcal{T}$ *un insieme di prova. Allora i seguenti assiomi e le seguenti regole sono complete per* $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$

Assioma 1. *Per ogni enunciato di prova* $\varphi(R) \in \mathcal{T}$, *tutti gli enunciati della forma*

$$\varphi(\bigvee_{i<\omega} \psi_i/R) \longrightarrow \bigvee_{i<\omega} \varphi(\psi_i/R).$$

Assioma 2. *Tutti gli enunciati validi in* $\mathfrak{L}^e$.

Assioma 3. *Tutti gli* $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$*-enunciati della forma*

$$\bigvee_{i<\omega} \psi_i \longrightarrow \psi_j \qquad (j<\omega).$$

Assioma 4. *Tutti gli* $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$*-enunciati della forma*

$$\bigvee_{i<\omega} \psi_i \longrightarrow \neg \bigwedge_{i<\omega} \neg \psi_i.$$

Regola 1. *Modus ponens, generalizzazione.*

Regola 2. *Da* $\vdash [\varphi \longrightarrow \psi_j]$ *per ogni* $j < \omega$, *segue*

$$\vdash [\varphi \longrightarrow \bigwedge_{j<\omega} \psi_j].$$

Regola 3. *Da* $\vdash \varphi(R)$ *segue* $\vdash \varphi(\sigma/R)$.

3. Teorema di omissione dei tipi per $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$. *Sia* $\mathcal{T}$ *un insieme di prova. Sia* $\mathfrak{L}^e_A$ *un frammento* $\mathcal{T}$*-chiuso di* $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$ *(v.* [Ba, pp. 63-64]*). Allora* $\mathfrak{L}^e_A$ *ha la proprietà di Omissione dei Tipi relativa all'insime* $\mathcal{T}_A$ *di* $\mathfrak{L}^e_A$*--enunciati della forma* $\varphi(R, \psi_1/P_1, \ldots, \psi_n/P_n)$, *in cui* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *sono* $\mathfrak{L}^e_A$*-enunciati e* $\varphi(R, P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{T}$.

4. Teorema di compattezza alla Barwise per $\mathfrak{L}^e_{\omega_1\omega}$. *Sia* $\mathcal{T}$ *un insieme di prova. Sia* $\mathcal{A}$ *la classe di tutte le* *macchine effettive di* $\mathbb{HF}(A)$. *Sia* $\mathfrak{L}^{e}_{\mathscr{A}}$ *il frammento contabile di* $\mathfrak{L}^{e}_{\omega_1\omega}$ *in cui* $\bigvee\Phi$ *e* $\bigwedge\Phi$ *sono* $\mathfrak{L}^{e}_{\mathscr{A}}$*-enunciati solo quando ogni* $\varphi\in\Phi$ *é risolto da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$. *Assumiamo che l'insieme degli enunciati* $\mathfrak{L}^{e}$*-validi sia ricorsivamente enumerato da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$ *e che* $\mathscr{T}$ *sia ricorsivamente enumerato da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$. *Allora*

(1) L'insieme degli enunciati $\mathfrak{L}^{e}_{\mathscr{A}}$*-validi e ricorsivamente enumerato da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$.

(2) Se T *é un insieme di* $\mathfrak{L}^{e}_{\mathscr{A}}$*-enunciati ricorsivamente enumerato da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$ *e se ogni* $\mathrm{T}_0\subseteq\mathrm{T}$ *risolto da qualche* $\Lambda\in\mathscr{A}$ *ha un modello effettivo, allora* T *ha un modello effettivo.*

5. Teorema di espressività per $\mathfrak{L}^{e}_{\omega_1\omega}$. *C'é una macchina effettiva in grado di tradurre ogni enunciato di una delle seguenti logiche in un'enunciato equivalente di ciascuna delle altre (v.* [MT]*).*

(1) $\mathfrak{L}^{e}_{\omega_1\omega}$.

(2) Logica infinitaria di Engeler.

(3) Logica dinamica.

(4) Logica delle definizioni effettive.

(5) Logica algoritmica.

RIFERIMENTI

[Ba] Barwise,J.: *The role of the Omitting Types Theorem in Infinitary Logic.* Arch. Math. Logik **21** (1981) 55-66.

[Ga] Gandy,R.: *Church's Thesis and Principles for Mechanisms.* In *THE KLEENE SYMPOSIUM.* Barwise,J., Keisler,H.J, Kunen,K. eds., North-Holland 1980.

[Ke] Keisler,H.J.: *Forcing and the Omitting Types Theorem.* In *STUDIES IN MODEL THEORY,* Morley,M. ed., Math. Assoc. Am. 1973.

[MT] Meyer,A.R., Tiuryn,J.: *A note on equivalence among Logics of Programs.* In *LOGICS OF PROGRAMS,* Kozen D. ed., Springer LNCS 131, 1982.

[Mu] Mundici,D.: *A Generalization of Abstract Model Theory.* Fund. Math. to appear (1984).

[Vi] Vincenzi,A.: *Effective Logic I. Basic notions.* In preparation.