

Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28
aprile 1984.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

(S. Tulipani, Univ. di Camerino)

PREMESSA

Il Teorema di Birkhoff [1935], uno dei primi cardini dell'Algebra Universale, afferma che una classe V di algebre simili è una varietà (cioè è chiusa per prodotti diretti, sottoalgebre e immagini omomorfe) se e solo se risulta essere la classe di tutti i modelli di un opportuno insieme di identità (= quantificazione universale di equazioni ovvero di formule atomiche). Poco dopo un altro teorema di Birkhoff [1944] mostra che ogni algebra è prodotto sottodiretto di algebre sottodirettamente irriducibili (abbr. SI). Dal momento che una identità risulta vera in un prodotto sottodiretto se e solo se è vera in tutti i fattori, dai due fondamentali teoremi di Birkhoff citati segue che la classe V_{SI} delle algebre SI di V determina V e quindi la logica equazionale. Acquista così notevole interesse il problema (non facile) dello studio della classe V_{SI} quando V è una varietà definita come modello di date identità o anche quando V è definita come la più piccola varietà contenente (varietà generata da) una classe data K di algebre. Per questo secondo problema si ha un importante risultato (Lemma di Jónsson [1967]) valido per varietà le cui algebre hanno reticolo distributivo (dette varietà distributive). Sempre per queste, grazie al citato e ad altri risultati di Jónsson, Baker [1974] risolve il problema dell'assiomatizzazione delle varietà distributive V generate da una sottoclasse K che risulta la classe di modelli di certi assiomi universali positivi assegnati. Proseguendo tale strada Baker [1977] è riuscito a generalizzare un teorema di McKenzie sui reticoli finiti mostrando che ogni algebra finita di tipo finito in una varietà distributiva genera a sua volta una varietà assiomatizzabile con un numero finito di identità (Teorema della Base finita).

I sopra citati risultati validi per le varietà distributive hanno notevole interesse anche nell'Algebra della Logica dove la maggior parte delle varietà prese in esame sono distributive. Per esempio si può dedurre che ogni logica modale normale che ha un modello caratteristico finito ha solo un numero finito di estensioni e tutte sono finitamente assiomatizzabili (vedi Blok [1980], Blok-Köhler [1983]).

La seguente rassegna è suddivisa in 4 paragrafi preceduti da un paragrafo di preliminari dove vengono richiamati alcuni prerequisiti e viene fissata la notazione.

Nel primo paragrafo viene studiato lo spettro delle algebre SI di una varietà V , cioè la classe dei cardinali dei membri di V_{SI} . Per determinare lo spettro infinito è essenziale un teorema dovuto a Taylor [1972], dimostrato in forma più generale da McKenzie-Shelah [1974] per i modelli T-semplifici di una teoria universale e presentato in maniera più algebrica da Banachewski-Nelson [1972]. Taylor definisce residualmente piccola una varietà V quando esiste un cardinale k per cui i membri di V_{SI} hanno cardinalità $\leq k$; poi dimostra che quando V è residualmente piccola si può prendere $k=2^\lambda$, dove $\lambda = \aleph_0^A + |\text{linguaggio di } V|$. Noi diamo tale fondamentale teorema seguito da una discussione su conseguenze e altri risultati connessi.

Nel secondo paragrafo viene trattato il problema dell'assiomatizzazione di varietà distributive generate da classi K_λ di modelli di assiomi universali positivi. La linea segue quella di Baker [1974] dove l'idea conduttrice è quella che segue dalla definizione e dal relativo Teorema di soddisfazione primitiva di enunciati del primo ordine universali disgiunzioni di equazioni (UDE). Il Teorema di soddisfazione primitiva generalizza alcuni risultati di Wille [1972] sui reticoli ed ha come corollario l'importante Lemma di Jónsson [1967], già dimostrato per altra via.

Nel terzo paragrafo, dopo aver enunciato i principali Teoremi della Base finita, dovuti a Birkhoff [1935], McKenzie [1978], Baker [1977], Jónsson [1976], si dà anche un cenno delle tecniche di dimostrazione.

Infine nell'ultimo paragrafo si segue la scia dei risultati descritti

nei paragrafi precedenti dentro la Teoria del Commutatore ([Ha-He/1979], [Gu/1980], [Fr-McK/1982]) la quale ha dato negli ultimi cinque anni una svolta sensibile e notevoli contributi all'Algebra Universale ponendo nuovi ed interessanti problemi.

§0.- Notazione e preliminari.-

Lettere latine maiuscole indicheranno una struttura e contemporaneamente il suo insieme base; saranno considerate quasi esclusivamente strutture algebriche, cioè senza relazioni, dette algebre. Con $Cg_A(a,b)$ si denoterà la minima congruenza di A contenente la coppia (a,b) ; essa è detta anche congruenza principale. Con O_A si denoterà la minima congruenza di A e con $Con(A)$ il reticolo delle congruenze di A . Si dice che A ha le congruenze permutabili se la composizione in senso relazionale di congruenze commuta; ciò implica, come è noto, la modularità di $Con(A)$. Si dice che una classe di algebre simili è a congruenze distributive, modulari... se il reticolo di congruenze di ogni algebra di K è distributivo, modulare,... Con $Id(A)$ si denoterà l'insieme delle identità (quantificazione universale di formule atomiche) valide in A ; se K è una classe di algebre simili con $Id(K)$ si denoterà l'insieme delle identità valide in ogni membro di K . Con $P(K)$, $S(K)$, $H(K)$, $P_S(K)$, $P_U(K)$ si denotano le classi delle algebre isomorfe rispettivamente a prodotti diretti, sottostrutture, immagini omomorfe, prodotti sottodiretti, ultraprodotti di membri di K . Una varietà è una classe chiusa per H,S,P . Una teoria T è equazionale, universale, positiva,.. se i suoi assiomi sono tali. E' ben noto che una teoria T è equazionale se e solo se la classe $Mod(T)$ dei suoi modelli è una varietà; T è universale sse $Mod(T)$ è chiusa per S , P_U ; T è universale-positiva sse $Mod(T)$ è chiusa per H,S,P_U . Una immersione è elementare se preserva le formule del primo ordine ed è pura se preserva le formule esistenziali positive. Infine, $D(A)$ (risp. $D^+(A)$) denoterà il diagramma (positivo) di A , cioè l'insieme degli enunciati atomici e negazione di essi (risp. atomici) nel linguaggio con costanti per elementi di A .

Tutte le altre nozioni e concetti non definiti saranno usuali; si fa riferimento a Grätzer [1979] , Chang-Keisler [1973] , Burris-Sankappanavar [1981] .

§ 1 - Spettro delle algebre sottodirettamente irriducibili in una varietà.

PROPOSIZIONE 1.1 - Se A è un'algebra sono equivalenti:

- (i) Se A possiede almeno due elementi allora esistono $a, b \in A$ tale che per ogni omomorfismo $f: A \rightarrow B$ si ha: $f(a) \neq f(b)$ sse f è iniettivo.
- (ii) Se $A \hookrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ è una rappresentazione di A in prodotto sottodiretto, allora esiste almeno un i tale che la proiezione $p_i: A \rightarrow A_i$ risulta un isomorfismo.
- (iii) Se $R_i \in \text{Con}(A)$, $i \in I$, $\bigcap_{i \in I} R_i = 0_A$, allora $\exists i \in I$, $R_i = 0_A$
- (iv) Se A possiede almeno due elementi allora esistono $a, b \in A$, $a \neq b$ tali che $R \in \text{Con}(A)$, $R > 0_A$ implica $R \geq C_{0_A}(a, b)$ (tale congruenza si chiama il monolita di A).

DEFINIZIONE 1.2 - Un'algebra soddisfacenti le condizioni equivalenti (i)-(iv)

si dice sottodirettamente irriducibile (abbr. SI) o anche (a,b)-irriducibile se (a,b) genera il monolita. Se K è una classe di algebre si denoterà con K_{SI} la classe dei membri SI di K. Si dice che A è finitamente SI (abbr. FSI) se A soddisfa (iii) della PROP.1.1 con I finito, o equivalentemente (ii) con I finito. K_{FSI} denoterà la sottoclasse delle FSI di una classe K. E' ovvio che $K_{SI} \subseteq K_{FSI}$.

PROPOSIZIONE 1.3 - L'unione di catene (il limite diretto di) algebre SI (FSI) è SI (FSI); sottoalgebre pure (e quindi anche sottostrutture elementari) di algebre SI (FSI) sono SI (FSI).

Dim. La dimostrazione si può fare usando direttamente la definizione oppure trovando, come segue, degli enunciati infinitari che assiomatizzano tutte le algebre SI, o FSI, in un fissato tipo.

DEFINIZIONE 1.4 (Taylor [1972]) - Sia T una teoria in un linguaggio \mathcal{L} , una formula $\varphi(x, y, u, v)$ in h variabili libere si dirà T-formula debole di congruenza se:

- (i) φ è positiva esistenziale.
- (ii) $T \vdash \exists x \varphi(x, x, u, v) \rightarrow u = v$

Quando T è la teoria senza assiomi propri φ si dirà formula di congruenza (omettendo T). Si denoti con \mathcal{C}_T la classe delle T-formule di congruenza e con \mathcal{C}_τ la classe delle formule di congruenza nel linguaggio per il tipo τ .

LEMMA debole di MAL'CEV 1.5 - Per ogni algebra A di tipo τ e per $a, b, c, d \in A$ sono equivalenti:

- (1) $(c, d) \in C_{0_A}^{\mathcal{C}_\tau}(a, b)$
- (2) Esiste $\varphi \in \mathcal{C}_\tau$ tale che $A \models \varphi(a, b, c, d)$

Dim. (1) \rightarrow (2). Si consideri il diagramma positivo di A $D^+(A)$. Allora $D^+(A) \cup \{a = b\} \models c = d$. Quindi esiste una congiunzione finita di enunciati di $D^+(A)$ tale che

$$\delta(a, b, c, d, \vec{z}) \models c = d$$

allora basta prendere come φ la formula $\exists \vec{z} \delta(x, y, u, v, \vec{z})$.

(2) \rightarrow (1). Se $R = C_{0_A}^{\mathcal{C}_\tau}(a, b)$ basta osservare che (2) implica (per (i))

$$A/R \models \varphi(a/R, b/R, c/R, d/R)$$

PROPOSIZIONE 1.6 - Le algebre SI, FSI rispettivamente, di tipo τ sono assiomatizzabili dagli enunciati infinitari

$$(1.1)_{SI} \quad \exists u \exists v \forall x \forall y \left[x=y \vee (u \neq v \wedge \bigvee_{\varphi \in \mathcal{C}_\tau} \varphi(x, y, u, v)) \right]$$

$$(1.1)_{FSI} \quad \forall x \forall y \forall z \forall w \exists u \exists v \left[(x=y) \vee (z=w) \vee \bigvee_{\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\tau} \varphi(x, y, u, v) \wedge \psi(z, w, u, v) \right]$$

OSSERVAZIONE 1.7 - Il Lemma 1.5 è chiamato debole perchè Mal'cev [1954] dimostra che in (2) si possono prendere particolari formule di \mathcal{C}_τ , chiamate (vedi [Bu-Sa/1981] Cap.V §3) formule principali di congruenza e precisamente formule $\pi(x, y, u, v)$ così definite:

(1.7)

$$(1.2) \quad \exists \vec{w} \left[u = p_1(z_1, \vec{w}) \wedge v = p_n(z_n, \vec{w}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} p_i(z'_i, \vec{w}) = p_{i+1}(z_{i+1}, \vec{w}) \right]$$

dove $\{z_i, z'_i\} = \{x, y\}$ e p_1, \dots, p_n sono termini in $k+1$ variabili del linguaggio per τ e $\vec{w} = (w_1, \dots, w_k)$. L'insieme di tali formule verrà denotato con Π_τ

Quando è che una varietà V è della forma $SP(K)$ per qualche insieme K ? Se ciò avviene si ha $V_{SI} \subseteq S(K)$ e quindi i membri di V_{SI} hanno cardinalità limitata da un certo k . Si dirà in tal caso che V è residualmente $< k$; si dirà che V è residualmente piccola quando esiste un k per cui V è residualmente $< k$. Viceversa, se V è residualmente piccola $V = SP(K)$ con K opportuno sottoinsieme di V_{SI} perchè per il Teorema di rappresentazione sottodiretta di Birkhoff $V = P_S(V_{SI})$. Si osservi che K può essere un insieme di rappresentanti nelle classi di isomorfismo di tutti gli elementi massimali (rispetto all'inclusione) di V_{SI} .

Il seguente Teorema insieme alla Proposizione 1.3 e il Teorema di Löwenheim-Skolem permette di stabilire che lo spettro infinito $\text{Spec}^{\geq \aleph_0}(V_{SI})$ di una varietà V residualmente piccola in un linguaggio \mathcal{L} è vuoto oppure un intervallo della forma

$$(1.3) \quad [\aleph_0^+, k) = \{ \mu : \aleph_0 \leq \mu < k \}$$

dove $\aleph_1^+ \leq k \leq (2^\lambda)^+$, (μ^+ è il cardinale successore di μ) e dove $\lambda = \aleph_0^+ + |\mathcal{L}|$. Ovviamente sempre dalla Proposizione 1.3 si ha che se V non è residualmente piccola allora lo spettro infinito di V_{SI} è la classe $[\aleph_0^+, \infty)$ di tutti i cardinali infiniti.

TEOREMA 1.8 (Taylor [1972], Banachewski-Nelson [1972]) - Sia $V = \text{Mod}(T)$ una varietà in un linguaggio \mathcal{L} e $\lambda = \aleph_0^+ + |\mathcal{L}|$, allora sono equivalenti:

- (i) V è residualmente piccola
- (ii) Per ogni T -formula debole di congruenza $\varphi(x, y, u, v)$ esiste un n (dipendente da φ) tale che:

$$(*) \quad T \vdash \forall u \forall v \left[\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(x_i, x_j, u, v) \rightarrow u=v \right]$$

(iii) $A \in V_{SI}$ implica $|A| \leq 2^\lambda$.

Dim. (i) \rightarrow (ii). Assumiamo V residualmente $< k$. Se per assurdo non valesse (ii) esisterebbe una formula $\varphi(x, y, u, v)$ di \mathcal{C}_τ per cui l'insieme di enunciati

$$(1.4) \quad T' = T \cup \left\{ \varphi(c_i, c_j, c_0, c_1), c_0 \neq c_1 \right\}_{1 < i < j < k}$$

è consistente, dove $C = \{c_i : i < k\}$ è un insieme di costanti non in \mathcal{L} . Sia allora M un modello di T' , R una congruenza di M massimale rispetto alla condizione $(c_0, c_1) \notin R$ (si denotano allo stesso modo le costanti e le loro interpretazioni); sia $B = M/R$. Poichè $M \in \text{Mod}(T')$, per ogni $i \neq j$ $(c_i, c_j) \notin R$; si ha $|B| \geq k$ e B è (b_0, b_1) -irriducibile con $b_i = c_i/R$, $i = 0, 1$. Ciò contraddice l'assunzione iniziale.

(ii) \rightarrow (iii). Sia $A \in V_{SI}$ (a, b) -irriducibile con $a \neq b$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_T$ si definisca

$$(1.5) \quad D_\varphi = \left\{ \{c, d\} : A \models \varphi(c, d, a, b) \text{ oppure } A \models \varphi(d, c, a, b) \right\}$$

Allora $D \subseteq A^{(2)}$ (= sottoinsiemi di A di cardinalità 2). Proviamo ora

$$(1.6) \quad A^{(2)} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}_T} D_\varphi$$

Infatti se $c, d \in A$, $c \neq d$ segue $(a, b) \in G_{A, c, d}$ (vedi Proposizione 1.1); allora per il Lemma di Mal'cev 1.5 si ha $(a, b) \in D_\varphi$ per qualche φ in \mathcal{C}_T . (Si osservi che φ si può prendere in Π_τ ! vedi OSS. 1.7; quindi si può sostituire in (ii) $\varphi \in \Pi_\tau$ anzichè \mathcal{C}_T).

Ora, poichè $|C_T| \leq \lambda$, se fosse $|A| > 2^\lambda$ dalla (1.6) per un teorema di partizione di ERDŐS-RADO [1956] dovrebbe esistere un $B \subseteq A$ di cardinalità $> \lambda$ ed un opportuno φ tale che $B^{(2)} \subseteq D_\varphi$. Ciò contraddice (ii).

(iii) \rightarrow (i). Banale.

OSSERVAZIONI

1.9 - Il teorema di Erdős-Rado usato sopra può essere enunciato con la notazione sui teoremi di partizione così: per λ infinito, $(2^\lambda)^+ \rightarrow (\lambda^+)_\lambda^2$. Vedi Chang-Keisler [1973], Theorem 7.2.1.

1.10 - La (ii) dà una caratterizzazione sintattica delle varietà residualmente piccole. Baldwin e Berman [1975] hanno dato una caratterizzazione sintattica anche delle varietà residualmente $< k$ per k numero naturale con una condizione analoga alla (ii) del Teorema 1.8 richiedendo in più che $n=k$ per ogni formula φ . In tale caratterizzazione si può far variare φ in \mathcal{C}_v ; tuttavia, come mostrano gli autori [Ba-Be/1975] non ci si può restringere a far variare φ in \mathbb{T}_v . Rimangono aperti i

PROBLEMI Dare una caratterizzazione sintattica in un linguaggio contabile di

- V è residualmente $< \aleph_0$ (residualmente finita)
- V è residualmente $< \aleph_1$ (residualmente contabile)

1.11 - Non si pone il problema per le varietà in linguaggio contabile che siano residualmente $< k$ per $\aleph_1 < k \leq 2^{\aleph_0}$ perchè McKenzie e Shelah [1974] hanno dimostrato ^{che} quando una varietà (di tipo contabile) possiede un'algebra SI non contabile allora ne possiede una di cardinalità 2^{\aleph_0} . Così le varietà in tipo contabile possono essere così classificate:

DENOMINAZIONE	S P E T T R O		ESEMPI
	infinito	finito	
Non res. piccole	$[\omega, \infty)$	S ?	Gruppi, reticoli, anelli
Res. piccole e non res. contabili	$[\omega, 2^\omega]$	S ?	Varietà generata da $([0,1], \oplus, ' 0,1)$ dove $[0,1]$ è l'intervallo reale e $x \oplus y = \max\{x+y, 1\}$, $x' = 1-x$; vedi [Man/1973]
Res. contabili e non res. finite	$\{\omega\}$	S ?	Gruppi abeliani, spazi vettoriali su un campo numerabile; Esempio in [Bal/1980] di varietà localmente finita di tipo finito
Res. finite e non res. $< k$ per $k \in \omega$	\emptyset	S; supS = ω	Esempio in [Ba-Be/1975] in tipo numerabile. Tipo finito? <u>PROBLEMA</u> (Quackenbush [1971]) <u>Esistono varietà generate da una algebra finita di tipo finito (o localmente finite)?</u>
Res. $< k$ e non res. $< k-1$ per $k \in \omega$	\emptyset	S; supS = $k-1$	Varietà generata da un reticolo SI di cardinalità $k-1$ (esempio M_{k-3})

1.12 - In generale non si può dire nulla sullo spettro finito (si veda [McK-Sh/1974] Theorem 6.1) a meno che non si faccia qualche ipotesi; (Es. V è distributiva rispetto alle congruenze, vedi § 2; V è modulare, vedi § 4). Tuttavia merita ricordare il seguente TEOREMA (Quackenbush [1971]). Se V è una varietà localmente finita tale che $\text{Spec}^{< \mathcal{H}_0} (V_{SI})$ finito allora $\text{Spec}^{> \mathcal{H}_0} (V_{SI}) = \emptyset$.

1.12 bis - Si dice che una varietà V ha la definibilità delle congruenze principali (abbr. DPC) se esiste una formula $\Phi(x,y,u,v)$ nel linguaggio di V tale che per ogni $A \in V$ e $a,b,c,d \in A$ segue: $(c,d) \in \mathcal{C}g_A(a,b)$ se e solo se $A \models \Phi(a,b,c,d)$; una tale Φ quando esiste può essere scelta come una disgiunzione di formule di $\prod_{\mathcal{L}}$ (vedi OSS. 1.7). Quando V è una varietà DPC allora la classe V_{SI} è assiomaticabile al primo ordine (vedi Proposizione 1.6); essa dunque non può essere residualmente piccola senza essere residualmente finita (vedi [Ba-Be/1975]). La DPC per una varietà implica [Tu/1982] la proprietà di definibilità delle congruenze generate da n coppie per ogni fissato n ; questa tuttavia per una classe assiomatica è in generale più forte [Mar/1983].

1.13 - McKenzie e Shelah [1974] mostrano l'equivalenza di (i) e (iii) del Teorema 1.8 nel caso più generale di modelli T-semplfici di una teoria universale. A è T-semplfica se e solo se è un modello di cardinalità > 1 della teoria universale T e ogni omomorfismo da A verso un modello di T è costante oppure un monomorfismo. La classe dei modelli T-semplfici per T universale non è vuota, questo fatto è stato dimostrato per la prima volta da R. Magari [1969] per teorie equazionali.

Tutti i concetti e i risultati intorno alle algebre SI trattati in precedenza possono essere dati più in generale per i modelli T-semplfici. Per vedere che lo studio dello spettro dei modelli T-semplfici comprende quello dei modelli SI basta considerare per una data varietà $V = \text{Mod}(E)$ la teoria $T = E \cup \{c_0 \neq c_1\}$ con c_0, c_1 nuove costanti. Allora il funtore dimenticante

da $\text{Mod}(T) \rightarrow V$ porta algebre T-semplfici in V_{SI} ed è surgettivo. Analogamente discorso può essere fatto per le estensioni essenziali di un'algebra A in una varietà $V = \text{Mod}(E)$. Ricordiamo che B è estensione essenziale di A in V se $B \in V$, $A \hookrightarrow B$ e ogni omomorfismo in partenza da B risulta iniettivo non appena lo sia la sua restrizione ad A . Se $D(A)$ è il diagramma di A allora i modelli T-semplfici con $T = E \cup D(A)$ sono chiaramente le estensioni essenziali di A in V .

Nell'articolo [Ta/1972], fondamentale per l'argomento, Taylor caratterizza le varietà residualmente piccole con altre proprietà oltre a quelle del Teorema 1.8. Ora enunceremo un teorema che fornisce altre caratterizzazioni interessanti. Daremo un cenno di una dimostrazione data da Banachewski-Nelson successivamente a quella di Taylor in uno stile più proprio dell'algebra universale che della teoria dei modelli.

TEOREMA 1.14 - (Taylor [1972]; Banachewski-Nelson [1972]) - Sia V una varietà in un linguaggio \mathcal{L} e sia $\lambda = \mathcal{H}_0 + |\mathcal{L}|$, allora sono equivalenti:

- (1) Per ogni $A \in V$ ogni estensione essenziale B di A ha cardinalità $2^{|A|+\lambda}$;
- (2) Se $A \in V_{SI}$ allora $|A| \leq 2^\lambda$;
- (3) V è residualmente piccola;
- (4) Ogni $A \in V$ può essere immersa in una estensione equazionalmente compatta che stia ancora in V .

Dim. (+ definizioni utili). (1) \rightarrow (2). Sia $A \in V_{SI}$ (a,b)-irriducibile e A_0 la sottoalgebra generata da $\{a,b\}$, allora A è estensione essenziale di A_0 ; quindi $|A| \leq 2^{|A_0|+\lambda} = 2^\lambda$.

(2) \rightarrow (3). Banale.

(3) \rightarrow (4). (Ricordiamo: B si dice equazionalmente compatta se ogni insieme Σ di formule atomiche con parametri in B (e qualsivoglia variabili) è soddisfacibile in B allorquando ogni sottoinsieme finito di Σ ha soluzione in B).

Poichè il prodotto cartesiano di eq. comp. risulta eq. comp. è sufficiente mostrare (per il teorema di rappresentazione sottodiretta di Birkhoff) che ogni $A \in V_{SI}$ è immergibile in un $B \in V$ che sia eq. comp. Sia \mathcal{M} la classe degli elementi massimali di V_{SI} . Poichè V è residualmente piccola è suffi-

ciente mostrare che ogni elemento B di \mathcal{M} è eq. comp. Sia dunque Σ un insieme di formule atomiche con parametri in B che sia finitamente soddisfacibile. Per il Teorema di Compatezza Σ è soddisfacibile in qualche estensione elementare C di B ; se mostriamo che esiste una retrazione $g:C \rightarrow B$, cioè un omomorfismo che ristretto a B risulti l'identità, allora g permette di trovare la soluzione simultanea di tutte le equazioni di Σ dentro B . Mostriamo dunque la seguente asserzione valida anche quando V non è residualmente piccola.

ASSERZIONE 1.15. Ogni $B \in \mathcal{M}$ è ritratto assoluto in V , cioè se $C \in V$, $f:B \rightarrow C$ è un monomorfismo, esiste $g:C \rightarrow B$ tale che $g \circ f = 1_B$. Sia infatti, R una congruenza di C massimale rispetto alla condizione $R \cap B^2 = 0_B$ e sia $B' = C/R$. Ovviamente esiste un monomorfismo $f_1:B \rightarrow B'$, B' è estensione essenziale di B che è SI; quindi B' è SI. Allora poichè $B \in \mathcal{M}$ si ha che f_1 è un isomorfismo; si prenda dunque $g:C \rightarrow B$ con $g = f_1^{-1} \circ p$ e $p:C \rightarrow C/R$ proiezione canonica.

(4) \rightarrow (1). Per una dim. dettagliata si veda [Gr/1979] Appendix 6 oppure [Ta/1971] [Ba-Ne/1972]. Si usa il fatto che se A è immergibile in un'algebra eq.comp. allora A possiede un nocciolo eq.comp. (che è una estensione eq.comp. minimale a meno di isomorfismi su A). Se B è un nocciolo eq.comp. di A allora (vedi [Gr/1979], [Ba-Ne/1972]) $|B| \leq 2^{|A|+\lambda}$. Il resto segue dalla seguente caratterizzazione delle algebre eq. compatte M in V (vedi [Ta/1971] [Ba-Ne/1972]).

ASSERZIONE 1.16. M è equazionalmente compatta se e solo se è iniettiva rispetto alle immersioni pure, cioè per ogni omomorfismo $f:M \rightarrow M$ e ogni immersione pura $g:M \hookrightarrow M_1$ esiste un omomorfismo $h:M_1 \rightarrow M$ tale che $f = h \circ g$.

OSSERVAZIONI.

1.17 - Dal Teorema 1.14 si può concludere, vedi ASS. 1.16, che ogni membro di una varietà res. piccola può essere immerso in un membro iniettivo rispetto alle immersioni pure in V . Quando è che ogni membro di

V può essere immerso in un membro iniettivo in V ("iniettivo" ha la stessa definizione ricordata in ASS. 1.16 con g non necessariamente pura). Si ha il

TEOREMA - ([Ta/1972] [Ba-Ne/1972]). Per ogni varietà V sono equivalenti:

- (i) Ogni membro di V può essere immerso in un membro iniettivo (= si dice che V ha "abbastanza iniettivi")
- (ii) V è residualmente piccola, ha la proprietà AP di amalgamazione e la proprietà CEP di estensione delle congruenze. -

1.18 - Sia V una varietà in un linguaggio \mathcal{L} e $\lambda = \aleph_0 + |\mathcal{L}|$. Allora la classe \mathcal{M} dei SI massimali in V ridotta modulo isomorfismo ha cardinalità $\leq 2^\lambda$. (Da ciò segue $V = SP(K)$ con K insieme $|K| \leq 2^\lambda$ se e solo se V è res. piccola).

Dim. Siano $A, B \in \mathcal{M}$, A sia (a_0, a_1) -irriducibile, B sia (b_0, b_1) -irriducibile. Nel linguaggio $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_0, c_1\}$ si considerino le strutture $A' = (A, a_0, a_1)_{\wedge}^{B_0}$ e $B' = (B, b_0, b_1)$.

Mostriamo: $Th(A') = Th(B')$ implica $A' \cong B'$. Allora si ha che le classi di isomorfismo di \mathcal{M} non sono più dei sottoinsiemi di enunciati di \mathcal{L}' e quindi $\leq 2^\lambda$.

Assumiamo $Th(A') = Th(B')$. Allora esistono immersioni elementari $A' \xrightarrow{f} C' \xleftarrow{g} B'$. Poichè A è ritratto assoluto in V (vedi ASS. 1.15) esiste $h:C' \rightarrow A'$ tale che $h \circ f = 1_{A'}$; allora $m:B' \rightarrow A'$, $m = h \circ g$ è surgettiva. Inoltre è iniettiva perchè $m(b_0) = a_0 \neq a_1 = m(b_1)$.

1.19 - Se V è una varietà residualmente piccola sorge la domanda: Quale è la cardinalità di V_{SI} ridotta modulo isomorfismo? Più in generale, se μ è un cardinale infinito e si pone $g(\mu, V) =$ numero delle classi di isomorfismo di membri di V_{SI} con cardinalità μ , che cosa si può dire su $g(\mu, V)$? Baldwin [1980] ha osservato che quando il linguaggio \mathcal{L} è contabile si possono adoperare due Teoremi seguenti (ricordiamo, PROPOSIZIONE 1.6, che V_{SI} è assiomaticamente da un enunciato di $\mathcal{L}_{\omega_1 \omega}$).

TEOREMA A - (Harnik-Makkai [1977]). Se σ è un enunciato di $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ e ha k modelli contabili con $\aleph_0 \leq k < 2^{\aleph_0}$ allora σ ha un modello di cardinalità \aleph_1 .

TEOREMA B - (Shelah) (G.C.H. o meno: $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$). Se un enunciato di $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ ha almeno uno ma meno di 2^{\aleph_1} modelli di cardinalità \aleph_1 allora esso ha un modello di cardinalità \aleph_2 .

Applicazione A. Una varietà V in linguaggio contabile che sia residualmente contabile ha $\leq \aleph_0$ oppure 2^{\aleph_0} modelli SI.

Applicazione B. (C.H.). Se una varietà residualmente piccola in linguaggio contabile ha almeno un'algebra SI di cardinalità \aleph_1 allora ne ha 2^{\aleph_1} .

 § 2.- Sottodirettamente irriducibili in una varietà dove i reticoli di congruenze sono distributivi; il problema dell'assiomatizzazione.-

Se V è una varietà generata da una data classe di algebre K , non si può dire in generale nulla a priori sulla classe V_{SI} ; per esempio vi sono varietà $V=V(A)$ generate da un'algebra finita che sono residualmente piccole ed altre che invece non lo sono. Se, ad esempio, G è un gruppo finito, allora $V(G)$ è residualmente piccola (con il che è residualmente finita) se e solo se G non possiede sottogruppi di Sylow non abeliani, vedi [Oa-Po/1964] [Ko-Ne/1966] [Fr-McK/1981]; in quest'ultimo si discutono varietà modulari residualmente piccole.

Tuttavia, nel caso $V=V(K)$ sia una varietà distributiva si ha un famoso Lemma dovuto a B. Jónsson [1967] che afferma che $V_{SI} \subseteq HSP_U(K)$. Tale lemma ha delle conseguenze importanti per le varietà distributive anche per il problema della determinazione di assiomi (equazionali) per V .

Per riconoscere se una classe K genera una varietà distributiva si usa in pratica una condizione, tipo Mal'cev, trovate sempre da B. Jónsson nel fondamentale [Jó/1967].

TEOREMA 2.1. - (Jónsson).- Le algebre di una varietà V hanno tutte reticolo delle congruenze distributivo se e solo se esistono termini t_0, \dots, t_n in 3 variabili nel linguaggio di V tali che in V sono soddisfatte le seguenti identità:

$$\Delta_n(V) \quad \left\{ \begin{array}{ll} t_0(x,y,z)=x, & t_n(x,y,z)=z \\ t_i(x,y,x)=x & i=0; \dots, n. \\ t_i(x,x,y)=t_{i+1}(x,x,y), & i \text{ pari} \\ t_i(x,y,y)=t_{i+1}(x,y,y) & i \text{ dispari} \end{array} \right.$$

La dimostrazione del teorema è tipicamente analoga a quella per la caratterizzazione delle varietà permutabili (Mal'cev [1954]), aritmetiche (Pixeley [1963]), modulari (Day [1969]); vedi [Bu-Sa/1981] §12 pag. 77.

Col Teorema 2.1 si possono ricavare vari esempi. Sono distributive le varietà con termine "maggioranza". Si chiamano così quelle varietà V generate da una classe K in cui esiste un termine ternario $m(x,y,z)$ che soddisfa le identità: $m(x,x,y)=m(x,y,x)=m(y,x,x)=x$. In V valgono le identità $\Delta_2(V)$ con $t_0=x$, $t_2=z$, $t_1=m(x,y,z)$. Hanno il termine "maggioranza" tutte le algebre che rispetto a due date operazioni \wedge, \vee formano un reticolo; basta prendere $m(x,y,z)=(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$.

Altri esempi di varietà distributive sono le algebre implicative, i reticoli debolmente associativi, (vedi [Gr/1979] pag. 356), le algebre con discriminatore, quelle con discriminatore duale, [Gr/1979] Appendix 5. Molti esempi di varietà distributive provengono dall'algebra della logica (vedi [Be/1975], [Mag/1975], [Sa-Va/1980], [Ur/1979]). Questi esempi rientrano quasi tutti tra le varietà con congruenze principali definibili da una congiunzione finita di equazioni (EDPC in breve), vedi OSS. 1.12. Köhler-Pigozzi [1980] mostrano che una varietà V è EDPC se e solo se il semireticolo delle congruenze compatte di ogni algebra in V risulta dualmente Broweriano; ciò implica che V è distributiva. Per uno studio approfondito vedi Blok-Pigozzi [1982], Blok-Köhler-Pigozzi [1982]. Esempi caratteristici di varietà EDPC e quindi distributive sono le

filtrali, vedi Magari [1969a], Magari [1973], Mazzanti [1972], Franci [1976], Fried-Grätzer-Quackenbush [1980]; Fried e Kiss [1980] hanno mostrato che filtrale equivale a distributiva e con le congruenze principali complementate.

OSSERVAZIONE 2.2 . - Il Teorema 2.1 fa sì che si possono adoperare i termini che appaiono in $\Delta_n(V)$ per provare certe proprietà di V; tra le più significative sono:

- La descrizione delle coppie che generano la congruenza $C_{\mathbb{A}}(a_1, b_1) \cap \dots \cap C_{\mathbb{A}}(a_n, b_n)$
- L'equivalenza relativamente a V di un insieme finito di identità con una singola identità (Teorema 5.1 pag. 147 [Ba/1974]).
- Ogni varietà distributiva V è sottovarietà di una varietà V_0 finitamente basata. Infatti basta prendere V_0 definita dalle sole identità $\Delta_n(V)$.

La linea di dimostrazione che viene percorsa qui per il Lemma di Jónsson è dovuta a Baker [1974]. Essa fa uso del Teorema di soddisfazione primitiva che è interessante anche per sé. Esso descrive le varietà generate da una sottoclasse K di una varietà distributiva quando K è assiomaticizzabile da enunciati universali positivi che a meno di equivalenza logica si possono supporre della forma:

$$(2.1) \quad \forall \vec{x} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i(\vec{x}) = q_i(\vec{x}) \right)$$

Tali enunciati come in Baker [1974], saranno detti UDE. I risultati di Baker sono una generalizzazione a varietà distributive di risultati di Wille [1972] intorno a varietà di reticoli.

DEFINIZIONE 2.3 .- Un'algebra A soddisfa primitivamente l'enunciato α UDE di (2.1), in simboli $A \models_P \alpha$ se e solo se per ogni $\vec{a} \in A^k$

$$(2.2) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C_{\mathbb{A}}(p_i(\vec{a}), q_i(\vec{a})) = 0_A$$

Si scriverà $A \models_P \Gamma$ se $A \models_P \alpha$ per ogni $\alpha \in \Gamma$.

OSSERVAZIONI.

2.4.- Se α è una identità, cioè $n=1$, allora: $A \models \alpha$ se e solo se $A \models_P \alpha$.

2.5.- $A \models \alpha$ implica $A \models_P \alpha$.

2.6.- Se A è finitamente sottodirettamente irriducibile (FSI) allora:

$$A \models \alpha \text{ se e solo se } A \models_P \alpha \text{ (vedi DEF. 1.2)}$$

TEOREMA 2.7 (di soddisfazione primitiva).- Sia V_0 una varietà distributiva, sia Γ un insieme di enunciati UDE nel linguaggio di V_0 , sia $K_0 = V_0 \cap \text{Mod}(\Gamma)$, allora

$$(2.3) \quad V(K_0) = \{ A : A \in V_0, A \models_P \Gamma \}$$

Dim. Se W è la parte destra di (2.3) si prova che $H(W) \subseteq W$, $S(W) \subseteq W$, $P(W) \subseteq W$, cioè W è una varietà. Quindi $V(K_0) \subseteq W$ perchè $K_0 \subseteq W$ per l'OSS. 2.5.

D'altra parte si ha $W \subseteq V(K_0)$ perchè $W_{SI} = (V_0)_{SI}$ per l'OSS. 2.6.

COROLLARIO 2.8 (Lemma di Jónsson).- Sia $V=V(K)$ una varietà distributiva, allora $V_{FSI} \subseteq \text{HSP}_U(K)$.-

Dim. Applicare il Teorema 2.7 con $K_0 = \text{HSP}_U(K)$ ed usare l'OSS. 2.6.

CONSEGUENZE DEL LEMMA DI JÓNSSON.

2.9 - Se K è una classe finita di algebre finite contenuta in una varietà distributiva, allora $V(K) = P_{SI} \text{HS}(K)$.

2.10- Se A è un'algebra finita e $B \in V(A)_{SI}$ allora $|B| \leq |A|$.

2.11- Se $A, B \in V_{SI}$, con V distributiva, $|A| < |B| < \aleph_0$ ed A non è isomorfa a B, allora esiste almeno una identità valida in A ma non in B.

2.12- Se $V = V_1 \vee V_2$ (=minima varietà contenente $V_1 \cup V_2$) è distributiva allora per ogni $A \in V$ esistono $A_i \in V_i, i=1,2$ tale che A è prodotto sottodiretto di A_1 ed A_2 .

2.13- Se $K = \text{Mod}(\Gamma) \cap V$, Γ insieme di enunciati UDE, $K_Y = \text{Mod}(\gamma) \cap V$, allora

$$V(K) = \bigcap_{Y \in \Gamma} V(K_Y) \quad (\subseteq \text{ è sempre vera!})$$

Quindi se $I[\gamma]$ è un insieme di assiomi (identità) per $V(K_Y)$,

allora $\bigcup_{Y \in \Gamma} I[\gamma]$ è un insieme di assiomi per $V(K)$.

PROBLEMA DELL'ASSIOMATIZZAZIONE.

Se K è una classe di algebre date, determinare assiomi per $V(K)$ non è facile. Ci proponiamo di mostrare che il problema è risolubile quando K è una classe assiomaticizzabile con assiomi UDE ed inoltre K genera una varietà distributiva. L'OSS. 2.13 mostra che ci si può ridurre a considerare

$K = \text{Mod}(\gamma) \cap V_0$ con γ enunciato UDE e V_0 varietà distributiva che senza perdere in generalità possiamo supporre definita dalle sole identità di Jónsson (TEOR.2.1).

Siano t_0, t_1, \dots, t_n i termini di Jónsson; per ogni $B \in V_0$ si definiscano le operazioni $\star_i, i=0,1,\dots,n$ sull'insieme B^2 mediante

$$(2.4) \quad (a,b)\star_i(c,d) = (t_i^B(a,c,b), t_i^B(a,d,b))$$

Si possono allora verificare (vedi Taylor [1978]) le proprietà:

$$(2.5) \quad B^2 \star_i 0 = 0 \star_i B^2 = 0_B$$

$$(2.6) \quad \text{Se } R \subseteq B^2 \text{ allora } (a,b)\star_i \bar{R} \subseteq \overline{(a,b)\star_i R}, \text{ dove } \bar{\quad} \text{denota la chiusura transitiva.}$$

$$(2.7) \quad \text{Se } R \in \text{Con}(B), (a,b) \notin R \text{ allora } \exists i (a,b)\star_i(a,b) \notin R.$$

DEFINIZIONE 2.14 Se $f(x,y_1,\dots,y_m)$ è una operazione oppure un termine di Jónsson, $b_1, \dots, b_m \in B$, allora l'applicazione da B a B $x \mapsto f^B(x,b_1,\dots,b_m)$ si dice 1-traslazione. Una composizione di k delle 1-traslazioni si dirà una k -traslazione. Una traslazione è una k -traslazione per qualche k .

$$(2.8) \quad \text{Se } (a,b) \in B, \text{ allora } Cg(a,b) \text{ è la chiusura simmetrico-transitiva di } J(a,b) = \{(Fa, Fb) : F \text{ è una traslazione}\}$$

$$(2.9) \quad \text{Se } a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in B, \bigcap_{1 \leq i \leq k} Cg_B(a_i, b_i) > 0_B \text{ allora esistono traslazioni } F_1, \dots, F_k \text{ ed } i_2, \dots, i_k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ tale che:}$$

$$(2.10) \quad (F_{11} a_1, F_{11} b_1) \star_{i_2} (F_{22} a_2, F_{22} b_2) \star_{i_3} \dots \star_{i_k} (F_{kk} a_k, F_{kk} b_k) \notin 0_B$$

(L'associazione delle operazioni \star_i viene presa per convenienza in un fissato modo, per esempio: $a \star b \star c \dots = (\dots((a \star b) \star c) \star \dots)$)

OSSERVAZIONI

2.15 - Sull'insieme $B^{(2)}$ dei sottoinsiemi di B con due elementi si può definire un preordine con: $\{a,b\} \rightarrow \{c,d\}$ se e solo se esiste una traslazione F tale che $\{Fa, Fb\} = \{c,d\}$. La (2.10) asserisce allora che $\{a_1, b_1\} \dots \{a_k, b_k\}$ ha un confine superiore nel preordine \rightarrow . Questo fatto viene chiamato "Arrow Lemma", vedi Baker [1977], Lemma 3.2.

2.16 - Per dimostrare che (2.9) implica (2.10) si usa in modo essenziale che i termini di Jónsson vengono adoperati per definire le traslazioni. Si veda, a tal proposito, Taylor [1978], Baker [1977], Jónsson [1976].

2.17 - Le operazioni \star_i possono essere definite anche sulle coppie di termini del linguaggio per V_0 , ossia sull'algebra dei termini detta anche algebra assolutamente libera.

DEFINIZIONE 2.18 - Sia $T(X)$ l'algebra dei termini del linguaggio di V_0 nello insieme $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ numerabile di variabili sia $\gamma = \forall \vec{x} (\bigvee_{1 \leq i \leq m} p_i(\vec{x}) = q_i(\vec{x}))$, un enunciato UDE, dove $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$. Si denoti con Δ la minima congruenza di $T(X)$ e si scriva $(p,q) \in \Delta$ per indicare l'identità $p \approx q$. Allora, l'insieme di identità $I[\gamma]$ è il seguente:

$$(2.11) \quad (F_{11} p_1(\vec{x}), F_{11} q_1(\vec{x})) \star_{i_2} (F_{22} p_2(\vec{x}), F_{22} q_2(\vec{x})) \star_{i_3} \dots \star_{i_m} (F_{mm} p_m(\vec{x}), F_{mm} q_m(\vec{x})) \in \Delta$$

al variare di i_2, \dots, i_m in $\{0, 1, \dots, n\}$ e di F_1, \dots, F_m tra tutte le possibili traslazioni di $T(X)$.

TEOREMA 2.19 - (Baker). - Con la notazione precedentemente usata, $\text{Id}(V_0) \cup I[\gamma]$ è un insieme di assiomi per $V(K)$.

Dim. Se $B \notin V(K)$ allora $B \not\models \gamma$ per il Teorema di soddisfazione primitiva. Dunque esiste $\vec{b} \in B^r$ tale che $\bigcap_{1 \leq i \leq m} Cg_B(p_i(\vec{b}), q_i(\vec{b})) > 0_B$. Ma, allora per (2.10) esiste una identità di $I[\gamma]$ che non vale in B . Viceversa, le identità di $I[\gamma]$ sono tutte soddisfatte in $V(K)$ in quanto per l'OSS.2.6 ogni $B \in V(K)_{SI}$ soddisfa γ e quindi per la (2.5) soddisfa tutte le identità di $I[\gamma]$.

§ 3. - Teoremi della Base finita. -

DEFINIZIONE 3.1 - Si dice che una teoria equazionale Σ è finitamente basata se esiste un sottoinsieme finito di Σ che ha gli stessi modelli di Σ . Si dice che una classe K è finitamente basata se $\text{Id}(K)$ lo è; si dice che una algebra A è finitamente basata se $\text{Id}(A)$ lo è.

ASSUNZIONE: D'ora in poi in questo paragrafo tutte le algebre e le classi di algebre considerate saranno di tipo finito.

E' un vecchio problema di Algebra Universale stabilire se $\text{Id}(A)$ risulta finitamente basata quando A è un'algebra finita. Uno dei primi risultati in tale direzione è il

TEOREMA 3.2. (Birkhoff [1935]) - Si A un'algebra finita di tipo finito e sia J l'insieme delle identità valide in A aventi variabili in $\{x_1, \dots, x_n\}$ per n fissato allora J è finitamente basata. -

Dim. Bastano ad assiomatizzare $V(A)$ le identità che si desumono dalla tabella di moltiplicazione dell'algebra libera di $V(A)$ con n generatori $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Vedi [Bu-Sa/1981] pag. 227.

Tuttavia, Lyndon [1954] ha costruito un'algebra di 7 elementi con una operazione binaria ed una costante che non è finitamente basata. Successivamente Visin [1963] ha trovato un esempio di 4 elementi e Murskii [1965] di 3 elementi. Perkins [1969] ha mostrato che non è finitamente basato il semi-gruppo delle sei matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempi, invece, di algebre finitamente basate sono: ogni algebra di 2 elementi e di tipo finito, Lyndon [1951]; ogni gruppo finito, Oates-Powell [1964]; ogni anello finito, Kruse [1973], Livov [1975]; cappi finiti commutativi di Moufang, Evans [1974]; ogni semigruppo di 3 elementi e ogni semigruppo commutativo, Perkins [1969]; ogni reticolo finito (possibilmente con operatori), McKenzie [1970]. Per una bibliografia più completa ed altri esempi vedi Taylor [1979].

Il risultato di McKenzie trova generalizzazione nel Teorema di Baker, annunciato nel 1972, e pubblicato più tardi.

TEOREMA 3.3 (Baker [1977]).- Ogni algebra finita di tipo finito appartenente ad una varietà distributiva è finitamente basata.-

La dimostrazione del Teorema di Baker segue la linee dei risultati riportati alla fine del paragrafo precedente ed è costruttiva. Altre dimostrazioni dello stesso teorema sono state date in seguito da Makkai [1973], il quale ha adoperato una ingegnosa idea usata da Herrmann [1973] per i reticoli, inoltre da Taylor [1978]. Tali dimostrazioni sono più brevi, tuttavia non costruttive. Una dimostrazione sempre non costruttiva di un teorema più generale di quello di Baker è dovuta a Jónsson [1976]

TEOREMA 3.4 (Jónsson).- Se V è una varietà di tipo finito con congruenze distributive e V_{FSI} è una classe elementare allora V è finitamente basata.

Prima di dare un cenno alle dimostrazioni di Baker e di Jónsson dei teoremi 3.3 e 3.4, rispettivamente, diamo un teorema della Base finita la cui dimostrazione è molto semplice e facciamo delle osservazione a commento dei dati teoremi.

TEOREMA 3.5 (McKenzie [1978]) Sia V una varietà localmente finita di tipo finito, con un numero finito (a meno d'isomorfismo) di SI e con la proprietà DPC (Definibilità delle Congruenze Principali). Allora V è finitamente basata.-

Dim. di 3.5- Sia Φ la formula che definisce le congruenze principali in V . Si può scrivere un enunciato del primo ordine Ψ tale che $A \in \text{Mod}(\Psi)$ se e solo se " Φ definisce le congruenze principali di A e se A è SI allora A è isomorfa ad un membro di V_{SI} ". Allora per ipotesi $\text{Id}(V) \vdash \Psi$. Quindi esiste un sottoinsieme J finito di $\text{Id}(V)$ tale che $J \vdash \Psi$. Allora $V = \text{Mod}(J)$ perchè sono entrambe varietà con gli stessi SI.

OSSERVAZIONI.

3.6 - Il Teorema 3.5 si applica anche a varietà non distributive, le para-primali ad esempio, [McK/1978], tuttavia non si applica a molte varietà distributive perchè la DPC è una proprietà molto forte; tra tutte le varietà di reticoli solo quella dei reticoli distributivi la possiede (vedi [McK/1978]).

3.7 - Nel Teorema 3.4 basta richiedere che la classe V_{FSI} sia assiomatica perchè automaticamente risulta anche elementare in quanto si vede facilmente che la classe $V-V_{FSI}$ è chiusa sotto ultraprodotti.

3.8 - Se V è distributiva e V_{SI} è una classe assiomatica allora anche V_{FSI} è assiomatica (e quindi elementare), ma non tutavia viceversa (vedi Baker [1977], Remark 10.4)

3.9 - Se V è una varietà distributiva con la proprietà che in ogni algebra di V l'intersezione di due congruenze principali è principale allora V_{FSI} è assiomatica (vedi Baker [1974], Teorema 2.15); quindi V è finitamente basata. Esempi di tali varietà sono: le algebre di Heyting, le algebre relazionali, le varietà con discriminatore.

3.10 - Ogni varietà con la proprietà EDPC, come si è ricordato nel paragrafo 2, è con congruenze distributive, Köhler-Pigozzi [1980]; si ha inoltre chiaramente che V_{FSI} è assiomatica. Blok-Pigozzi [1982] (§ 2) danno un metodo abbastanza semplice per determinare identità per V con EDPC. Come si è già ricordato esempi di tali varietà provengono in gran parte dall'algebra della logica.

3.11 - Il Teorema 3.4 comprende il 3.3. Infatti quando $V=V(A)$ con A finita è una varietà distributiva si ha $V_{FSI} \subseteq HS(A)$; quindi V_{FSI} è assiomatica essendo una classe finita di algebre finite.

Cenno sulla linea di dimostrazione di Baker del Teorema 3.3.

Sia A come nell'enunciato, sia $V_0 \supseteq V(A)$ la varietà determinata dalle sole identità di Jónsson (vedi TEOR. 2.1 e OSS. 2.2). Sia $|A|=N$,
 $K = \{ B : B \in V_0, |B| \leq N \}$.

FATTO 3.12.- $V(K)$ finitamente basata implica $V(A)$ finitamente basata.-

Infatti: per il Lemma di Jónsson $V(K)_{SI} = K_{SI}$; siano dunque A_1, \dots, A_p i membri (a meno d'isomorfismo) di $K_{SI} - V(A)_{SI}$. Quindi esistono p identità e_1, \dots, e_p che valgono in A e tale che e_i non vale in A_i , $i=1, \dots, p$. Allora l'insieme $Id(K) \cup \{e_1, \dots, e_p\}$ assiomatizza $V(A)$. Rimpiazzando A con $A \times A_1 \times \dots \times A_p$ si può dunque supporre $V(A)=V(K)$.

Sia ora δ l'enunciato UDE: $\forall x_0 \dots \forall x_N (\bigvee_{0 \leq i < j \leq N} x_i = x_j)$; allora $K = V_0 \cap Mod(\delta)$. Quindi per il Teorema 2.19 $Id(V_0) \cup I[\delta]$ è un insieme di assiomi per $V(K)$ (purtroppo esso è infinito!). Baker determina allora dei criteri per cui l'insieme $I[\gamma]$ del Teorema 2.19 può essere sostituito con un sottoinsieme finito (vedi [Ba/1977] Teorema 4.4, Criterio 4.5) e poi applica tali criteri al caso $I[\delta]$ in questione. Per essere più precisi si osservi che $I[\delta]$ è ottenuto ponendo in (2.11) $m=N(N+1)/2$ e (p_k, q_k) , $k=1, \dots, m$ tutte le possibili coppie (x_i, x_j) con $0 \leq i < j \leq N$. Si denoti ora con $I_r[\delta]$ tutte le possibili identità di $I[\delta]$ in cui le traslazioni F_1, \dots, F_m sono s -traslazioni con $s \leq r$. Siccome il tipo è finito è facile mostrare che $I_r[\delta]$ è finito. (Nella composizione di 1-traslazioni $F \circ G$ nell'algebra dei termini si deve sostituire le variabili che non compaiono in G con variabili che non compaiono in G che hanno indice più basso possibile).

Si denoti ora con J_N un insieme finito di identità che sia una base per le identità di $V(A)$ aventi N variabili. Tale insieme esiste per il Teorema 3.2 della Base dovuto a Birkhoff. Baker a questo punto mostra che

$$(3.1) \quad Id(V_0) \cup J_N \cup I_r[\delta] \quad , \quad \text{con } r=2^{6m}, \quad m=N(N+1)/2$$

è un insieme (finito) di identità per $V(K)$. La dimostrazione è alquanto complicata; essa fa uso di fatti combinatorici, quali il Teorema di Ramsey nel caso finito. Il metodo per determinare le identità (3.1) di Baker è primitivo ricorsivo. Un metodo alquanto più semplice nella dimostrazione, ma solo ricorsivo, si trova in Taylor [1978].

Dim. del Teorema 3.4 di Jónsson. - Sia V come nell'enunciato, sia $V_0 \supseteq V$ la varietà determinata dalle sole identità di Jónsson. Per $B \in V_0$ e per $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in B^2$ tali che $Cg_B(a_1, b_1) \cap Cg_B(a_2, b_2) > 0_B$ si definisca $r(a_1, b_1, a_2, b_2)$ come il minimo r per cui esistono r -traslazioni F_1, F_2 ed $i \in \{0, \dots, n\}$ tale che:

$$(3.2) \quad (F_1 a_1, F_1 b_1) *_{i} (F_2 a_2, F_2 b_2) \notin 0_B$$

almeno un r esiste per (2.9) (2.10). Si definisca a valori in $\omega \cup \{\infty\}$

$$(3.3) \quad R(B) = \sup \{ r(a_1, b_1, a_2, b_2) : Cg_B(a_1, b_1) \cap Cg_B(a_2, b_2) > 0_B \}$$

e se \mathcal{C} è una sottoclasse di V_0

$$(3.4) \quad R(\mathcal{C}) = \sup \{ R(B) : B \in \mathcal{C} \}$$

$R(B)$ viene detto il raggio di B ; la sua definizione è stata data per la prima volta da Herrmann [1973] per i reticoli.

FATTO 3.13 - Se \mathcal{C} è una sottoclasse assiomatica di V_0 allora \mathcal{C}_{FSI} risulta assiomatica se e solo se $R(\mathcal{C}_{FSI}) < \infty$.

Per la dimostrazione si osservi che, essendo il tipo di V_0 finito, si possono definire formule del primo ordine $\phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2)$ tali che $B \models \phi_s(a_1, b_1, a_2, b_2)$ se e solo se $r(a_1, b_1, a_2, b_2) \leq s$. Il resto discende dalla definizione di FSI e dalle (2.9) (2.10).

FATTO 3.14. - Se $R(V_{FSI}) = s$ allora $R(V) \leq s+2$.

Per le dimostrazioni e per i dettagli si veda Grätzer[1979], Appendix 3, oppure Baker [1977] § 10.

Essendo per ipotesi V_{FSI} assiomatica, per 3.13 esiste un $s \in \omega$ tale che $R(V_{FSI}) = s$. Si consideri allora la classe $\mathcal{B} = \{ B : B \in V_0, R(B) \leq s+2 \}$; questa è una classe strettamente elementare tale che contiene V per 3.14. Quindi la classe $\mathcal{C} = \mathcal{B}_{FSI}$ è assiomatica per 3.13 e quindi elementare per l'OSS. 3.7. Inoltre si ha che $\mathcal{C} \cap V = V_{FSI}$ è elementare (per ipotesi) e che $\mathcal{B}_{SI} \subseteq \mathcal{C}$. Allora la conclusione della dimostrazione può essere tratta usando il seguente teorema, di facile dimostrazione (vedi [Gr/1979], Appendix 3), che non fa uso dell'ipotesi di distributività

TEOREMA 3.15 (Jónsson). - Sia V una varietà, \mathcal{B} una classe elementare contenente V . Se esiste una classe assiomatica \mathcal{C} tale che $\mathcal{B}_{SI} \subseteq \mathcal{C}$, $V \cap \mathcal{C}$ è elementare, allora V è finitamente basata.

OSSERVAZIONI.

3.16 - Il fatto 3.14 vale anche nella forma: $R(V_{SI}) = s$ implica $R(V) \leq s+2$.

Allora come già osservato (OSS.3.8) V_{SI} assiomatica implica V_{FSI} assiomatica.

Infatti: V_{SI} assiomatica implica $R(V_{SI}) < \infty$ il che implica $R(V) < \infty$, da cui $R(V_{FSI}) < \infty$ e quindi la conclusione per 3.13.

3.17 - Dal Teorema 3.15 segue pure la dimostrazione del Teorema della Base di McKenzie 3.5. Basta, infatti, prendere come \mathcal{B} la classe delle algebre dove Φ definisce le congruenze principali e $\mathcal{C} = \mathcal{B}_{SI}$.

§ 4. -Avvento del Commutatore.-

Si è sviluppata recentemente per le varietà modulari V l'importante teoria del Commutatore che permette di definire per ogni A di V una applicazione

$$[,] : \text{Con}(A) \times \text{Con}(A) \rightarrow \text{Con}(A)$$

che gode delle basilari proprietà:

$$(4.1) \quad [\alpha, \beta] = [\beta, \alpha] \leq \alpha\beta$$

$$(4.2) \quad [\alpha, \beta + \gamma] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma]$$

$$(4.3) \quad h^{-1}[\alpha, \beta] = [h^{-1}\alpha, h^{-1}\beta] + \ker h, \text{ per ogni epimorfismo } h:A \rightarrow B$$

ed $\alpha, \beta \in \text{Con}(B)$.

D'ora in poi denoteremo con $\alpha\beta$ l'intersezione di congruenze e con $\alpha+\beta$ l'unione reticolare, cioè la minima congruenza contenente $\alpha \cup \beta$.

Il Commutatore fu introdotto da J. Smith [1976] per la varietà permutabili; esso generalizza la nota nozione di commutatore definita sui sottogruppi normali di un gruppo. Hagemann ed Herrmann[1979] hanno esteso il

commutatore alle varietà modulari. Successivi fondamentali lavori di Gumm [1980] Freese e McKenzie [1982], (vedi quest'ultimo per una eccellente panoramica) hanno fatto crescere la teoria e l'hanno applicata con successo a molti problemi in varietà modulari. L'operazione di commutatore, nelle varietà con buona teoria degli ideali può essere definita su questi, Gumm-Ursini [1983]; essa diventa qui un valido strumento di indagine.

Mi limiterò semplicemente ad esaminare alcuni risultati, ottenuti con la teoria del commutatore, che si ricollegano ai risultati esposti nei paragrafi precedenti.

4.1.- Caratterizzazione delle varietà modulari residualmente piccole.

Freese e McKenzie [1981] (vedi anche [Fr-McK/1982], Parte I, §8) provano che una varietà modulare residualmente piccola deve soddisfare la seguente relazione sulle congruenze:

$$(i) \quad \alpha[\beta, \beta] \leq [\alpha, \beta]$$

Se inoltre V è finitamente generata, $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$, dove:

(ii) V è residualmente piccola

(iii) V è residualmente $< n$ per qualche numero naturale n .

Tali risultati danno una risposta negativa al problema di Quackenbush (vedi OSSERVAZIONE 1.11) per le varietà modulari, migliorando considerevolmente la risposta negativa di Taylor [1979a] per varietà regolari permutabili. Una risposta negativa al problema di Quackenbush è stata data anche per varietà generate da un semigruppato finito, McKenzie [1982].

Freese e McKenzie [1981] (Theorem 10.5) mostrano, generalizzando risultati di Lampe-Taylor [1983] per varietà permutabili, che ogni algebra semplice in una varietà modulare generata da un'algebra finita A ha cardinalità non superiore a quella di A . Inoltre, McKenzie [1983] caratterizza le varietà di K -anelli residualmente piccole come quelle che soddisfano per qualche $n > 1$ l'identità: $(x-x^n)(y-y^n) = ((x-x^n)(y-y^n))^n$.

4.2.- Sulla generalizzazione del Lemma di Jónsson a varietà modulari.

Hagemann ed Herrmann [1979], nell'articolo originario da cui parte la teoria del commutatore per varietà modulari sono i primi ad osservare che il Lemma di Jónsson può essere generalizzato.

Un'algebra A di una varietà modulare è detta prima se da $[\alpha, \beta] = 0$ segue $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$. Per la proprietà (4.1) si ha che la classe delle algebre prime è contenuta in V_{FSI} e che coincide con questa quando V è distributiva, essendo il commutatore uguale all'intersezione in tal caso. Così il Lemma di Jónsson diventa

TEOREMA 4.3 (Hagemann-Herrmann [1979], Corollario 3.3).- Se A è un'algebra prima in una varietà modulare V generata da una classe K , allora $A \in HSP_U(K)$.-

Il medesimo teorema viene formulato da Gumm [1981] in maniera un po' più generale. Se $\alpha \in \text{Con}(A)$, A in una varietà modulare, si definisce centralizzante di α : $\zeta(\alpha) = V\{\beta : [\alpha, \beta] = 0\}$; sia poi $\xi_A = \{\zeta(\alpha) : \alpha \in \text{Con}(A), \alpha > 0\}$

TEOREMA 4.4 (Gumm [1981], Theorem 6.19). - Se V è una varietà modulare generata da K ed $A \in V_{FSI}$, allora $A/\xi_A \in HSP_U(K)$.-

La dimostrazione di questo teorema è simile a quella originale di Jónsson; essa sfrutta le proprietà del commutatore in luogo della distributività. Se A è prima allora, come si è già detto, $A \in V_{FSI}$ ed inoltre $\xi_A = 0$; quindi il teorema 4.4 contiene il 4.3.

R. Freese e R. McKenzie ottengono di più per la classe V_{SI} per una varietà localmente finita e precisamente

TEOREMA 4.5 (Freese-McKenzie [1982], Theorem 10.2).- Se V è una varietà localmente finita generata da una classe K , $A \in V_{SI}$ con monolita μ , allora $A/\zeta(\mu) \in SP_{U \setminus \mu}^{HS}(K)$.-

COROLLARIO 4.6 ([Fr-McK 1982], Corollary 10.4)- Se V è distributiva localmente finita generata da K allora $V_{SI} \subseteq SP_U^{HS}(K)$.-

Gli autori mostrano con un controesempio che nel Corollario 4.6 non si può omettere l'ipotesi di finitezza locale. Tuttavia, ci si può chiedere

se per una varietà distributiva V generata dalla classe K di tutti i suoi membri finiti vale $V_{SI} \subseteq SP_U(K)$ come accade per la varietà dei reticoli; una risposta positiva comporterebbe che una varietà V distributiva soddisfa gli stessi enunciati universali soddisfatti nella classe dei suoi modelli finiti se è solo se V risulta generata dai membri finiti, cioè soddisfa le stesse identità di questi; questo è un problema lasciato aperto in [Tu/1983].

Una delle conseguenze importanti del Lemma di Jónsson è che $V_{SI} \subseteq HS(A)$ quando V è una varietà distributiva generata dall'algebra finita A ; Freese [1982] ha introdotto il concetto di similitudine e, via commutatore, ^{ha mostrato} che, sostituendo l'ipotesi di distributività con la modularità nel risultato precedente, si ha che ogni membro di V_{SI} è simile ad uno di $HS(A)$. Anche i risultati di Kiss [1983], che generalizzano precedenti risultati di Davey [1977] e Kóllar [1980], mostrano che il passo dalla distributività alla modularità, via commutatore, è breve.

4.7 - Sul Teorema di Baker.

Poiché le varietà generate da gruppi finiti [Oa-Po/1964] e da anelli finiti [Kr/1973] sono finitamente basate, una generalizzazione naturale del Teorema di Baker dovrebbe essere: ogni algebra finita di tipo finito in una varietà modulare genera una varietà finitamente basata. Tuttavia, un tale risultato non è possibile; Polin [1976] ha dato un esempio di un anello non associativo finito (quindi a congruenze permutabili e perciò modulare) che genera una varietà non finitamente basata. Un esempio più semplice è in Vaughan-Lee [1979].

Esistono esempi di varietà V generate da un'algebra finita di tipo finito e tale che nessuna varietà localmente finita $W \supseteq V$ risulta finitamente basata. Queste V sono dette "inherently" non-finitamente basate (vedi [McN-Sh/1982] e bibliografia). Tuttavia, gli esempi finora noti non sono di varietà modulari. In [McN-Sh/1982] viene formulato, tra gli altri problemi, il

PROBLEMA: Esiste un'algebra finita di tipo finito in una varietà modulare che sia "inherently" non-finitamente basata.

Applicazione delle condizioni del "termine" hanno portato alla prova che certi reticoli algebrici non possono essere reticoli di congruenze di semigrupp (Taylor [1982], Theorem 1); così applicazioni della condizione sui termini in varietà modulari in particolare del termine denominato "differenza ternaria" (vedi Freese-McKenzie [1982] § 4, Gumm [1981] § 7, Taylor [1982], Theorem 3) potrebbero portare ad una risposta negativa per il problema sopra formulato. Inoltre, una analisi approfondita del commutatore, della sua parentela con il prototipo in Teoria dei Gruppi, potrebbe dare una soddisfacente generalizzazione del Teorema di Baker.

4.8 - Oltre il Commutatore.

Anche se la maggior parte delle varietà interessanti sono distributive o modulari rimane tuttavia fuori qualche non trascurabile caso, esempio i semigrupp. La definizione data da Freese-McKenzie [1982] non è per niente legata alla modularità anche se è provato che solo in questo contesto funziona bene. Nell'ambito più generale di quello modulare, lo studio delle varietà quasi-abeliane ha dato ottimi risultati (Baldwin-McKenzie [1982]) per lo spettro dei modelli infiniti di teorie di Horn. Altrettanto si potrebbe sperare per lo studio delle varietà decidibili localmente finite per le quali, in ambiente modulare, grazie al commutatore si sa tutto (Burris-McKenzie [1981]).

B I B L I O G R A F I A

- [Ba/1974] K. A. BAKER "Primitive satisfaction and equational problems for lattices and other algebras", Trans. AMS 190, 125-150.
- [Ba/1977] _____ "Finite equational basis for finite algebras in a congruence-distributive equational class", Advances in Math. 24, 207-243.
- [Bal/1980] J.T. BALDWIN "The number of subdirectly irreducible algebras in a variety II", Alg. Univ. 11, 1-6.
- [Ba-Be/1975] J.T. BALDWIN and J. BERMAN "The number of subdirectly irreducible algebras in a variety", Alg. Univ. 5, 379-389.
- [Ba-Mck/1982] J.T. BALDWIN and R. MCKENZIE "Counting models in universal Horn classes", Alg. Univ. 15, 359-384.
- [Ba-Ne/1972] B. BANACHEWSKI and E. NELSON "Equational compactness in equational classes of algebras", Alg. Univ. 2, 152-165.
- [Be/1975] C. BERNARDI "On the equational class of diagonalizable algebras", Studia Logica 34, 239-251.
- [Bi/1935] G. BIRKHOFF "On the structure of abstract algebra", Proc. Cambr. Philos. Soc. 31.
- [Bi/1944] _____ "Subdirect unions in universal algebra", Bull. AMS 50.
- [Bl/1980] W.J. BLOK "The lattice of modal logics; an algebraic investigation", JSL 45, 221-236.
- [Bl-Ko/1983] W.J. BLOK and P. KÖHLER "Algebraic semantics for quasi-classical modal logics", JSL 48, 941-964.
- [Bl-Ko-Pi/1982] W.J. BLOK, P. KÖHLER and D. PIGOZZI "On the structure of varieties with equationally definable principal congruences II", Preprint.
- [Bl-Pi/1982] W.J. BLOK and D. PIGOZZI "On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I", Alg. Univ. 15, 195-227.
- [Bu-McK/1981] S. BURRIS and R. MCKENZIE "Decidability and Boolean representations", Memoirs of AMS n.246.
- [Bu-Sa/1981] S. BURRIS and H.P. SANKAPPANAVAR "A course in Universal Algebra", CTM n.78, Springer-Verlag.
- [Ch-Ke/1973] C.C. CHANG and H.J. KEISLER "Model Theory", Studies in Logic vol.73, North-Holland.

- [Da/1969] A. DAY "A characterization of modularity for congruence lattices of algebras", Canad. Math. Bull. 12, 167-173.
- [Dav/1977] B.A. DAVEY "Weak injectivity and congruence extension in congruence distributive equational classes", Canad. J. Math. 29, 449-459.
- [Ev/1974] T. EVANS "Identities and relations in commutative Moufang loops", J. Algebra 31, 508-513.
- [Er-Ra/1956] P. ERDÖS and R. RADO "A partition calculus in set theory", Bull. AMS 62, 427-489.
- [Fra/1976] R. FRANCI "Filtral and ideal classes of universal algebras", Quad. Ist. Mat. Università di Siena.
- [Fr/1982] R. FREESE "Subdirectly irreducible algebras in modular varieties", Springer Lect. Notes 1004.
- [Fr-McK/1981] R. FREESE and R. MCKENZIE "Residually small varieties with modular congruence lattices", Trans. AMS 264, n.2, 419-430.
- [Fr-McK/1982] _____ "The commutator, an overview", Preprint.
- [Fr-Gr-Qu/1980] E. FRIED, G. GRÄTZER and R. QUACKENBUSH "Uniform congruence schemes", Alg. Univ. 10, 176-189.
- [Fr-Ki/1980] E. FRIED and E.W. KISS "Connection between the congruence lattices and polynomial properties", in pubblicazione su Alg. Univ.
- [Gr/1979] G. GRÄTZER "Universal Algebra", 2nd ed., Springer-Verlag.
- [Gu/1979] H.P. GUMM "An easy way to the commutator in modular varieties", Arch. Math. 34, 220-228.
- [Gu/1981] H.P. GUMM "Geometrical methods in congruence modular algebras", Preprint 639, Technische Hochschule Darmstadt.
- [Gu-Ur/1983] H.P. GUMM and A. URSINI "Ideals in Universal Algebra", in pubblicazione su Alg. Univ.
- [Ha-He/1979] J. HAGEMANN and C. HERRMANN "A concrete ideal multiplication for algebraic systems and its relation to congruence distributivity", Arch. Math. 32, 234-245.
- [Ha-Mak/1977] V. HARNIK and M. MAKKAI "A tree argument in infinitary model theory", Proc. AMS 67, 309-314.
- [He/1973] C. HERRMANN "Weak (projective) radicals in finite equational bases for classes of lattices", Alg. Univ. 3, 51-58.

- [Jo/1967] B. JÓNSSON "Algebras whose congruence lattices are distributive", Math. Scand. 21, 110-121.
- [Jo/1976] _____ "A short proof of Baker's finite basis theorem", vedi [Gr/1979], Appendix 3.
- [Ki/1983] E.W. KISS "Injectivity and related concepts in modular varieties", Preprint 29, Math. Inst. Hungar Acad. Sci., Budapest.
- [Ko-Pi/1980] P. KÖHLER and D. PIGOZZI "Varieties with equationally definable principal congruences", Alg. Univ. 11, 176-189.
- [Ko/1980] J. KOLLAR "Injectivity and congruence extension in congruence distributive equational classes", Alg. Univ. 10, 21-26.
- [Ko-Ne/1966] L.G. KOVACS and M.F. NEWMAN "On critical groups", J. Austral. Math. Soc. 6, 237-250.
- [Kr/1973] R.L. KRUSE "Identities satisfied by a finite ring", J. Algebra 26, 298-318.
- [La-Ta/1982] W.A. LAMPE and W. TAYLOR "Simple algebras in varieties", Alg. Univ. 14, 36-43.
- [Li/1975] I.V. LIVOV "Finitely based identities for non associative rings", Alg. i Logika 14.
- [Ly/1954] R.C. LYNDON "Identities in finite algebras", Proc. AMS 5.
- [Ly/1951] _____ "Identities in two-valued calculi", Trans. AMS 71.
- [Mag/1969] R. MAGARI "Una dimostrazione del fatto che ogni varietà ammette algebre semplici", Ann. Un. Ferrara VII 14, 1-4.
- [Mag/1969a] _____ "Varietà a quozienti filtrali", Ann. Un. Ferrara VI 14, 5-20.
- [Mag/1973] _____ "The classification of idealizable varieties. Congruenze ideali IV.", J. Algebra 26, 152-165.
- [Mag/1975] _____ "The diagonalizable algebras", BUMI (4) 12.
- [Mak/1973] M. MAKKAI "A proof of Baker's finite-base theorem on equational classes generated by finite elements of congruence distributive varieties", Alg. Univ. 3, 174-181.
- [Mal/1954] A.I. MAL'CEV "On the general theory of algebraic systems", Mat. Sb.(77) 35, 3-20.
- [Man/1973] F. MANGANI "Su certe algebre connesse con logiche a più valori" BUMI 8, 68-78.

- [Mar/1983] G. MARONGIU "Definibilità al primo ordine delle congruenze principali e delle congruenze compatte", BUMI 2-A, 47-53.
- [Maz/1972] G. MAZZANTI "Classi filtrali e distributività delle congruenze", Ann. Un. Ferrara VI 17, 149-157.
- [McK/1970] R. MCKENZIE "Equational bases for lattice theories", Math. Scand. 27, 24-38.
- [McK/1978] _____ "Para-primal varieties: a study of finite axiomatizability and definable principal congruences in locally finite varieties", Alg. Univ. 8, 336-348.
- [McK/1982] _____ "Residually small varieties of semigroups", Alg. Univ.
- [McK/1983] _____ "Residually small varieties of K-Algebras", Alg. Univ.
- [McK-Sh/1974] R. MCKENZIE and S. SHELAH "The cardinals of simple models for universal theories", Proc. Symp. Pure Math. Vol. XXV, 53-74, AMS Providence.
- [McN-Sh/1982] G.F. McNULTY and C.R. SHALLON "Inherently nonfinitely based finite algebras", Springer Lect. Notes 1004.
- [Mo/1983] F. MONTAGNA "The well-founded algebras", Alg. Univ. 16, 38-46.
- [Mu/1965] V.L. MURSKII "The existence in three-valued logic of a closed class with finite basis not having a finite complete set of identities", Sov. Math. Dokl. 6.
- [Oa-Po/1964] S. OATES and M.B. POWELL "Identical relations in finite groups", J. Algebra 1, 11-39.
- [Pe/1969] P. PERKINS "Bases for equational theories of semigroups", J. Algebra 11, 293-314.
- [Pi/1963] A.F. PIXLEY "Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras", Proc. AMS 14, 105-109.
- [Po/1976] S.V. POLIN "On the identities of finite algebras", Sib. Math. J. 17.
- [Qu/1971] R.W. QUACHENBUSH "Equational classes generated by finite algebras", Alg. Univ. 1, 265-266.
- [Sa-Va/1980] G. SAMBIN and S. VALENTINI "Post completeness and free algebras", Z. Math. Logik 26, 343-347.

- [Sh/19] S.SHELAIH "Classification theory for non-elementary classes I, the numbers of uncountable models of $\Psi \in L_{\omega, \omega}$, JSL
- [Sm/1976] J.D.H.SMITH "Mal'cev varieties", Springer Lect. Notes 554.
- [Ta/1971] W. TAYLOR "Some constructions of compact algebras", Ann ML3, n.4, 395-435.
- [Ta/1972] _____ "Residually small varieties", Alg. Univ. 2, 33-53.
- [Ta/1978] _____ "Baker's finite basis theorem", Alg. Univ. 8, 191-196.
- [Ta/1979] _____ "Equational logic", Houston J. of Math. Vol.5, vedi anche [Gr/1979], Appendix 4.
- [Ta/1979a] _____ "Subdirectly irreducible algebras in regular permutable varieties", Proc. AMS 75, 196-200.
- [Ta/1982] _____ "Some applications of the term conditions", Alg. Univ. 14, 11-24.
- [Tu/1982] S.TULIPANI "On classes of algebras with the definability of congruences", Alg. Univ. 14, 269-279.
- [Tu/1983] _____ "On the universal theory of classes of finite models", Trans. AMS.
- [Ur/1979] A.URSINI "Intuitionistic diagonalizable algebras", Alg. Univ. 9, 229-237.
- [Va/1979] M.R.VAUGHAN-LEE "Laws in finite loops", Alg. Univ.
- [Vi/1963] V.V.VISIN "Identity transformations in four-valued logic", Sov. Math. Dokl. 4.
- [Wi/1972] R.WILLE "Primitive subsets of lattices", Alg. Univ. 2, 95-98.