AMALGAMAZIONE E TEORIE FISICHE

Giovanni Badino

Antonello Provenzale

Antonio Vincenzi

Sia $\mathfrak{L}$ una logica generalizzata (come quelle considerate in [Mu2]). In questo caso $\mathfrak{L}$ ha la proprietà di ***amalgamazione forte*** quando

Per ogni $\mathfrak{L}$-struttura $\mathfrak{M}_i$ relativa al vocabolario L_i $(i=0,1,2)$, se $L_0 = L_1 \cap L_2$ e $\mathfrak{M}_1 \xleftarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{M}_0 \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{M}_2$, allora c'é una $\mathfrak{L}$-struttura $\mathfrak{M}$ relativa al vocabolario $L_1 \cup L_2$ tale che $\mathfrak{M}_1 \xrightarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{M} \xleftarrow[\mathfrak{L}]{} \mathfrak{M}_2$ (dove $\xrightarrow[\mathfrak{L}]{}$ é l'immersione elementare determinata da $\mathfrak{L}$).

In particolare, se tale proprietà vale solo per $L_1 = L_2$, allora diremo che $\mathfrak{L}$ ha la proprietà di ***amalgamazione***. Inoltre, in [Mu1], é stato dimostrato che, quando $\xrightarrow[\mathfrak{L}]{}$ é involutiva, allora la proprietà di amalgamazione forte di $\mathfrak{L}$ equivale alla seguente proprietà di ***consistenza di Robinson*** di tale logica:

Se T_0 é una teoria $\mathfrak{L}$-completa relativa al vocabolario L_0 e se T_i é un'estensione $\mathfrak{L}$-consistente di T_0 relativa al vocabolario L_i $(i=1,2)$, allora $T_1 \cup T_2$ é una teoria $\mathfrak{L}$--consistente relativa al vocabolario $L_1 \cup L_2$.

Consideriamo ora, in particolare, la ***logica sperimentale*** $\mathfrak{L}_s$, sostanzialmente individuata dalle seguenti caratteristiche

- le ***strutture sperimentali*** sono coppie $\mathfrak{M} = \langle \|\mathfrak{M}\|, M\rangle$ in cui $\|\mathfrak{M}\|$ é una struttura ordinaria a due sorta σ_1 e σ_2 (i cui universi M_1 e M_2 possono essere rivisti, rispettivamente, come l'insieme degli oggetti fisici che si vogliono studiare e l'insieme degli oggetti matematici con cui li si descrive) tali che i simboli di sorta σ_1 sono solo costanti ed i simboli di sorta mista sono solo funzioni da σ_1 a σ_2 e dove M é un insieme di istruzioni atte a realizzare operativamente ogni funzione $f: M_1 \longrightarrow M_2$ e ad associare ad ogni suo valore $f(x)$ una approssimazione $\Delta f(x)$ (la cui natura dipende dagli oggetti matematici considerati). In particolare M può essere una macchina sperimentale come quelle descritte in [**Vi**];
- la relazione di ***soddisfazione sperimentale*** $\models_s$ é ottenuta nella maniera seguente: si considerano le classi $\mathscr{M}$ di tutte le strutture sperimentali $\mathfrak{M} = \langle \|\mathfrak{M}\|, M\rangle$ relative ad un dato vocabolario ed aventi una parte "puramente matematica" $\|\mathfrak{M}\| \upharpoonright \sigma_2$ coerente, al prim'ordine, con una data teoria T (espressa con simboli di sorta σ_2). Si definisce una relazione di forcing infinito $\Vdash\!\sim$ (v. [**Ro**]) ponendo

$\mathfrak{M} \Vdash\!\sim \varphi\, [\mathscr{M}]$ sse $\|\mathfrak{M}\| \models_{\omega\omega} \varphi$ e le funzioni di sorta mista contenute in φ sono realizzabili operativamente tramite M con la precisione richiesta quando φ é atomica,

$\mathfrak{M} \Vdash\!\sim \neg\varphi\, [\mathscr{M}]$ sse non c'é alcuna $\mathfrak{M}' \in \mathscr{M}$ tale che $\|\mathfrak{M}'\|$ é un'estensione di $\|\mathfrak{M}\|$ ed M' estende il dominio delle funzioni realizzate da M o ne migliora la precisione, tale che $\mathfrak{M}' \Vdash\!\sim \varphi\, [\mathscr{M}]$

e procedendo in maniera usuale per $\wedge$ ed $\exists$. Tramite il Teorema del Modello Generico si ha che $\Vdash\!\sim$ coincide con $\models_{\omega\omega}$ ristretta alle strutture generiche $\|\mathfrak{M}[\mathscr{M}]\|$, individuando la relazione di soddisfazione $\models_s$.

Si ha allora il seguente

Risultato. *La logica sperimentale ha la proprietà di amalgamazione ma non la proprietà di amalgamazione forte.*

La parte positiva di questa affermazione si ottiene sulla base delle proprietà di $\Vdash\!\sim$ (la cui introduzione é così giustificata). Per la parte negativa si considerino, invece, le seguenti teorie (di cui segnaleremo esplicitamente solo le parti strettamente fisiche, ovvero le parti di tali teorie in cui compaiono dei simboli di sorta mista).

$T_0 = th_s(\mathfrak{M}_0)$ dove $\mathfrak{M}_0 = \langle \|\mathfrak{M}_0\|, M_0\rangle$ é una struttura sperimentale in cui $\|\mathfrak{M}'\| \upharpoonright \sigma_2$ é un modello al prim'ordine di **ZFC** + *assiomi specifici della teoria analitica del potenziale* ed M_0 é un apparato che individua operativamente una funzione costante E (contenente un parametro numerico t), per cui T_0 contiene la seguente legge di conservazione dell'energia

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0.$$

$T_1 = T_0 +$ la chiusura universale dei seguenti assiomi

$$\frac{d\,m(x,t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\,q_i(x,t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i(x,t)} \qquad i = 1,2,3$$

$$\frac{d\,q_i(x,t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i(x,t)} \qquad i = 1,2,3$$

$$H(t) = \sum_{\substack{c \in C \\ i=1,2,3}} \frac{p_i^2(c,t)}{2m(c,t)} + \textit{potenziale}$$

$$\frac{d\,H(t)}{dt} = 0$$

dove x é una σ_1-variabile e $C = \{c_1,\ldots,c_n\}$ é l'insieme di tutte le σ_1-costanti (ovvero l'assiomatizzazione hamiltoniana della dinamica di un insieme finito C di particelle, relativa alla loro massa m, posizione q e quantità di moto p).

$T_2 = T_0 +$ la chiusura universale dei seguenti assiomi

$$\frac{d\,A_i(x,t)}{dt} = 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\frac{d\,k(x,t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\,o(x,t)}{dt} = 0$$

$$H'(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A^2\,(k(x,t))\,d\,k(x,t)\,dx$$

$$\frac{d\,H'(t)}{dt} = 0$$

(ovvero l'assiomatizzazione della dinamica di un insieme di onde lineari relative alla loro ampiezza A, al loro numero d'onda k e alla loro pulsazione o, in cui x varia sulle componenti sinusoidali di tali onde).

T_0, T_1, T_2 soddisfano, perciò, le ipotesi della proprietà di Robinson. Inoltre da T_1 si trae che non esiste alcun limite superiore alla precisione con cui é possibile misurare m, q_i, p_i, H e da T_2 si trae un'analoga conclusione per A_i, k, o ed H'. D'altra parte in $T_1 \cup T_2$ si incontrano gli usuali fenomeni di indeterminazione, si conclude cioé che la seguente relazione

$$\Delta\,k(x)\,\Delta q(x) > 1$$

vale per ogni x, contraddicendo le affermazioni precedenti e facendo saltare l'amalgamazione forte di Ω_s.

Questo risultato comporta due conseguenze di fondo relative allo studio della logica delle scienze fisiche:

Conseguenza 1. *Le logiche che soddisfano la proprietà di Robinson (ed, in particolare, la logica del prim'ordine) sono inadatte allo studio delle teorie fisiche.*

Conseguenza 2. *I fenomeni di indeterminazione sono legati all'amalgamazione di teorie fisiche relative a vocabolari differenti e non disgiunti.*

RIFERIMENTI

[**Mu1**] Mundici,D.: *Embeddings, Amalgamation and Elementary Equivalence.* To appear in Fund. Math. 1984.

[**Mu2**] Mundici,D.: *A Generalization of Abstract Model Theory.* To appear in Fund. Math. 1984.

[**Ro**] Robinson,A.: *Infinite forcing in model theory.* In PROC. OF THE SECOND SCANDINAVIAN LOGIC SYMPOSIUM North-Holland, 1971, 317-340.

[**Vi**] Vincenzi,A.: *Gli esperimenti come macchine astratte.* In ATTI DEGLI INCONTRI DI LOGICA MATEMATICA di Siena 1982, 235-238.