Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

TEORIE p-$\aleph_0$-CATEGORICHE

Carlo Toffalori (Firenze)

Sia T una teoria del 1° ordine, completa, contabile, senza modelli finiti, per ogni $M \models T$ consideriamo l'algebra di Boole $B(M) = (\{\phi(M, \bar{m}) : \phi(v, \bar{w})$ $L(T)$-formula, $\bar{m} \in M\}, \cap, \cup, ', \emptyset, M)$ dei sottoinsiemi definibili di M.

Osservazioni

1. $|B(M)| = |M|$.
2. $B(M)$ è atomica (cfr. $\{m\}$, per $m \in M$).

Problema - Classificare le teorie mediante i tipi di isomorfismo delle algebre $B(M)$, per $M \models T$.

Definizione - Sia k un cardinale infinito, T si dice p-k-categorica se esiste un solo tipo di isomorfismo delle algebre $B(M)$ quando M varia tra i modelli di T di cardinalità k.

3. Se $k \geq \aleph_1$, T p-k-categorica $\longleftrightarrow$ T k-categorica.
4. Se $k = \aleph_0$, T p-$\aleph_0$-categorica $\overset{\not\rightarrow}{\leftarrow}$ T $\aleph_0$-categorica (cfr. ACF^0).

Da 4. nasce l'interesse dello studio delle teorie p-$\aleph_0$-categoriche. Passo obbligato è considerare la classificazione di Ketonen dei tipi di isomorfismo delle algebre di Boole B contabili. Particolarmente chiara è la situazione quando B è superatomica, in tal caso:

tipo di isomorfismo di B $\leftrightarrow$ tipo di Cantor-Bendixson di B.

D'altra parte, si ha che sono equivalenti:

* per ogni modello contabile M di T, $B(M)$ è superatomica;
* per ogni modello contabile M di T, $S(M)$ -lo spazio duale di

B(M) - è contabile;

* T è ω-stabile.

Dunque, se T è ω-stabile, T è p-$\aleph_0$-categorica se e solo se le algebre B(M), al variare di M tra i modelli contabili di T, hanno lo stesso tipo di Cantor-Bendixson.

<u>Conseguenze</u>

a. Se T è categorica, T è p-$\aleph_0$-categorica (T $\aleph_1$-categorica: T è ω-stabile + analisi di Baldwin).

b. Nessun chiaro rapporto tra stabilità e p-$\aleph_0$-categoricità.

c. Se B è un'algebra di Boole contabile atomica, esiste una teoria T p-$\aleph_0$-categorica (superstabile) tale che, per ogni modello contabile M di T, B(M) $\simeq$ B.

<u>Definizione</u> - Una struttura M è p-$\aleph_0$-categorica se Th(M) è p-$\aleph_0$-categorica.

<u>Problema</u> - Classificare le strutture p-$\aleph_0$-categoriche (ω-stabili).

i. (campi) Se K è un campo ω-stabile, K è p-$\aleph_0$-categorico (cfr. Macintyre: Th(K) = ACF^0). Si ha anche:

* RCF è p-$\aleph_0$-categorica;

* DCF^0 è p-$\aleph_0$-categorica.

ii. (gruppi)

* Se G è un gruppo abeliano ω-stabile, G è p-$\aleph_0$-categorico (cfr. Macintyre: G = D $\oplus$ H, con D divisibile, H di esponente finito).

* Se G è un FC-gruppo ω-stabile, G è p-$\aleph_0$-categorico (G è un FC-gruppo se, per ogni a $\in$ G, $|\{x^{-1}ax : x \in G\}| < \aleph_0$, Felgner

ha classificato gli FC-gruppi ω-stabili).

* Esiste un gruppo G nilpotente di classe 2 ω-stabile ma non p-$\aleph_0$-categorico (Mekler: classificare i gruppi nilpotenti di classe 2 ω-stabili equivale a caratterizzare tutte le strutture ω-stabili).

<u>Osservazione</u> - Da c. segue che l'insieme dei tipi di isomorfismo delle algebre B(M) per M modello contabile di T e T non ω-stabile non è capace di determinare il grado di stabilità di T. Ad esempio, la teoria T_0 dell'ordine lineare denso privo di estremi è p-$\aleph_0$-categorica ed instabile, ma, se B è la relativa algebra di Boole, esiste T p-$\aleph_0$-categorica e superstabile tale che, per ogni modello contabile M di T, B(M) $\simeq$ B. Siano allora T una teoria, $\phi(v, \bar{w})$ una L(T)-formula (definita a meno di T-equivalenze), M $\models$ T, consideriamo l'algebra di Boole $B_\phi(M) = (\phi(M, \bar{m}) : \bar{m} \in M)$.

<u>Problema</u> - Classificare le teorie tramite i tipi di isomorfismo delle algebre $B_\phi(M)$, per M $\models$ T, $\phi(v, \bar{w})$ L(T)-formula.

<u>Definizione</u> - T è localmente p-$\aleph_0$-categorica se, per ogni L(T)-formula $\phi(v, \bar{w})$, esiste un solo tipo di isomorfismo delle algebre $B_\phi(M)$ quando M varia tra i modelli contabili di T.

Si ha che T è stabile se e solo se, per ogni M $\models$ T, $|M| = \aleph_0$, per ogni L(T)-formula $\phi(v, \bar{w})$, $B_\phi(M)$ è superatomica (ed ha tipo di Cantor-Bendixson < (ω, 1)) (cfr. $B_{v \leq w}(M)$ non è superatomica se M è un modello contabile di T_0).

Valgono risultati analoghi a quelli relativi alle teorie p-$\aleph_0$-

categoriche. Si ha però che (se T è stabile)

T p-$\aleph_0$-categorica $\not\rightleftarrows$ T localmente p-$\aleph_0$-categorica.

Il migliore risultato in tal senso pare essere il seguente:

<u>Teorema</u> - Se T è stabile ed ammette un modello contabile M tale che l'algebra B(M) è superatomica ed ha tipo di Cantor-Bendixson (1, n), allora sono equivalenti le proposizioni:

* T è p-$\aleph_0$-categorica;
* T è localmente p-$\aleph_0$-categorica;
* T ha la proprietà del ricoprimento finito.