Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



# SU UNA TEORIA GENERALE DELLE PROPRIETÀ, BASATA SU SCHEMI DI COMPRENSIONE ITERATI E PRIVI DI TIPI

ANDREA CANTINI
Firenze

1.Formuliamo una teoria delle proprietà,GIP,ottenuta iterando lo schema di comprensione type-free di Gilmore-Feferman ([1])lungo un preordine diretto. La logica di GIP contiene,oltre ai tradizionali connettivi,una successione di negazioni forti nel senso di Fitch[5].Nonostante che l'idea di fondo sulla quale si basa GIP sia legata a una problematica logico-filosofica (Scott[5],iterazione delle definizioni di verità;Kripke[4],classificazione degli enuciati autoreferenziali),si prova che GIP individua esattamente il quarto livello della classificazione delle teorie matematiche ordinarie di H.Friedman ([3],[6],[7]),il sistema $ATR_0$. La "proof theory" di GIP e di alcune estensioni viene quindi applicata alla metamatematica di $ATR_0$, $\Sigma^1_1$-$TI_0$ e $ATR_0+\Sigma^1_1$-$DC_0$ (c.f.r.[6],[7] ).

2.<u>La teoria GIP</u>. Il linguaggio L di GIP è un linguaggio elementare,che contiene costanti applicative per una teoria delle operazioni totali [8],p.101, comprese le costanti N(insieme dei naturali),$\underline{0}$ (zero),successore e predecessore. Oltre a =,i predicati di L sono $\leq$, $\eta$ ;L contiene gli operatori logici T,F,nonchè variabili per oggetti (x,y,z,..), e per livelli (i,j,k,..). Gli atomi di L hanno la forma $t=s, i\leq j, t\eta_i s$ ("t è in s a livello i).

Alcuni termini di L-indicati metalinguisticamente con $\{x:A(x)\}$ -fungono da nomi di astratti.Le formule sono generate con le usuali operazioni elementari(la quantificazione è ammessa anche su livelli); inoltre,se A è una formula,$T_i(A),F_i(A)$ sono formule. Una formula $T_i(A)(F_i(A))$ è detta i-segnata;una i-proprietà è un astratto della forma $\{x:A\}$,dove A è i-segnata. Abbreviazioni:$x\bar{\eta}_i y:=F_i(x\eta_i y)$; $A\equiv_i B:=(T_i(A)\leftrightarrow T_i(B))\wedge(F_i(A)\leftrightarrow F_i(B))$;$Cl_i(a):=\forall x(x\eta_i a\vee x\bar{\eta}_i a)$:="a è una i-classe".

Assiomi.2.1.Logica elementare classica estesa con i seguenti principi: $T_i$ preserva $\wedge,\vee,\forall x,\exists x$,(ma non $\forall i,\exists i$);$F_i$ è una negazione forte,i.e.vale $F_i(A)\rightarrow\neg A$ ,ma non $\neg A\rightarrow F_i(A)$,etc.;inoltre si ha: se A è i-segnata, $T_j(A)\leftrightarrow A\wedge i\leq j$; $\neg A\wedge i<j\rightarrow F_j(A)$;



$F_j(A)\rightarrow j\geq i$. 2.2.Assiomi standard su N e sulle operazioni,compreso il principio $Cl_i(N)$ e l'induzione sulle i-classi.2.3.La relazione $\leq$ è un preordine diretto.2.4.Comprensione.Sia $A(x,\underline{z})$ priva di quantificatori sui livelli e atomi della forma $i\leq j$,e siano $i_1,..,i_n$ le variabili di livello che occorrono in A;allora $k\geq i_1,..,i_n\rightarrow$

$$\rightarrow\forall u(u\eta_k\{x:A(x,\underline{z})\}\equiv_k A(u,\underline{z})).$$

2.5.Estensioni.$GIP_1$:come GIP,eccetto che l'induzione è ammessa su formule del tipo (+), $\exists i\exists v(Cl_i(v)\wedge\wedge A(x,v))$,dove A è i-elementare (A contiene solo $\eta_i$, a destra di $\eta_i$ figurano solo variabili libere,e non vi sono quantificatori su livelli).

$GIP_{dc}$:come GIP,più lo schema delle scelte dipendenti per condizioni del tipo (+).

3.Proprietà di GIP.Per ogni i,il sistema delle i-classi,$Cl_i$,è chiuso rispetto alle operazioni booleane,nonchè $\Pi$ e $\Sigma$(prodotto e somma disgiunta generalizzati). Per ogni i,esistono i-proprietà che non sono i-classi,ma ogni i-proprietà è una j-classe per $j>i$. Sia $Cl_N(a):=\exists i(Cl_i(a)\wedge a\subseteq N)$. Allora si prova: $GIP\vdash Cl_N\models ATR_0$ ;$GIP_1\vdash Cl_N\models\Sigma^1_1\text{-}TI_0$ e $GIP_{dc}\vdash Cl_N\models ATR_0+\Sigma^1_1\text{-}DC$. $ATR_0$ è l'analisi aritmetica estesa con l'enunciato:"su ogni buon ordine

R di N e per ogni X N, esiste una gerarchia, ottenuta iterando il jump lungo R a partire da X"([6]).

<u>4. Sulla metamatematica di GIP.</u> Sia $IP_{<\omega}$ la teoria ottenuta da GIP, interpretando i livelli i, j, ..., come numeri e "$i \leq j$" come l'ordine standard su $\mathbb{N}$; $IP_{<\omega}$ contiene dunque infiniti predicati $\eta_0, \eta_1, \ldots$ e operatori $T_0, T_1, \ldots; F_0, F_1, \ldots$

4.1. <u>Teorema</u>. GIP e $IP_{<\omega}$ hanno gli stessi teoremi aritmetici.

4.2. <u>Teorema</u>. $IP_{<\omega}$ ha gli stessi teoremi della analisi predicativa

Otteniamo così un'altra prova di un risultato di Friedman [3]: $|ATR_0| = \Gamma_0$.

Le dimostrazioni di 4.1-2 combinano tecniche standard di $\omega$-logica con i modelli asimmetrici di [2].

Si possono definire estensioni transfinite di $IP_{<\omega}$, $IP_{<\omega^\omega}$ e $IP_{<\varepsilon_0}$, e provare :

$GIP_1 \equiv IP_{<\omega^\omega} \equiv \Sigma^1_1\text{-}TI_0$ ; $\Sigma^1_1\text{-}TI_0 + \Pi^1_1\text{-}TI_0 \equiv ATR_0 + \Sigma^1_1\text{-}DC_0 \equiv$
$\equiv GIP_{dc} \equiv IP_{<\varepsilon_0}$ ( $\equiv$ :=equivalenza rispetto ai teoremi aritmetici).



<u>Bibliografia.</u>


[1] A.Cantini: Proprietà e Operazioni, Bibliopolis, Napoli, 1983.

[2] A.Cantini: A note on a predicatively reducible theory of iterated elementary induction, Boll.U.M.I, 4-B(1985), 413-430.

[3] H.Friedman, K.Mc Aloon, S.Simpson: A finite combinatorial principle which is equivalent to the 1-consistency of predicative analysis, Patras Logic Sympsion, ed. G.Metakides, North-Holland, 1982, 197-230.

[4] S.Kripke: Outline of a theory of truth, Journal of Philosophy, 72(1975), 690-716.

[5] D.Scott: Combinators and Classes, Lecture Notes in Computer Science n°37, 1975, 1-26.

[6] S.Simpson: Reverse Mathematics, preprint, 1982.

[7] S.Simpson: $\Sigma^1_1$ and $\Pi^1_1$ transfinite induction, Logic Colloquium '80, ed. D.van Dalen, North-Holland, 1982, 239-253.

[8] M.Beeson: Foundations of Constructive Mathematics, Springer, 1985.