Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

ALCUNI SISTEMI COSTRUTTIVI E SEMICOSTRUTTIVI DEL PRIMO ORDINE

PIERANGELO MIGLIOLI, UGO MOSCATO, MARIO ORNAGHI
Dipartimento di Scienza dell'informazione Università di Milano

1. Introduzione.

I risultati che esporremo in questo articolo riguardano le proprietà costruttive di alcuni sistemi deduttivi del primo ordine S=T+L: la notazione indica che il sistema S è costituito da una parte matematica T (una teoria del primo ordine nel senso di[3]) e da una logica L con identità intermedia fra quella intuizionista INT e quella classica CL.

Per meglio mettere in evidenza che una stessa teoria T dà luogo a sistemi diversi al variare di L, indicheremo con "$T \vdash^{L} A$" il fatto che A è deducibile nel sistema T+L. Data una teoria T, si può costruire, fra gli altri, il T-sistema classico T+CL: come è noto, si possono scegliere T e L tali che T+L è consistente, mentre il T-sistema classico non lo è [8]. In questo articolo saremo interessati soltanto a quei sistemi T+L che risultano consistenti sse i corrispondenti T-sistemi classici sono consistenti; questo significa che le logiche di cui ci occuperemo conterranno il principio di Kuroda [8]: (K) $\forall x \neg\neg A(x) \rightarrow \neg\neg \forall x A(x)$, per ogni A del linguaggio.

Le proprietà costruttive che tratteremo saranno la (piena) costruttività e la semicostruttività: diremo che S=T+L è costruttivo sse S soddisfa la proprietà della disgiunzione PD ($T \vdash^{L} A \vee B$ e $A \vee B$ è chiusa $\Longrightarrow$ $T \vdash^{L} A$ o $T \vdash^{L} B$) e la proprietà della esplicita definibilità PED ($T \vdash^{L} \exists x A(x)$ e $\exists x A(x)$ è chiusa $\Longrightarrow$ esiste un termine chiuso t tale che $T \vdash^{L} A(t)$); diremo invece che S=T+L è semicostruttivo sse S soddisfa la proprietà debole della disgiunzione PDD ($T \vdash^{L} A \vee B$ e $A \vee B$ è chiusa $\Longrightarrow$ $T \vdash^{CL} A$ o $T \vdash^{CL} B$, dove, come si è visto, CL è la logica classica) e la proprietà debole della esplicita definibilità PDED ($T \vdash^{L} \exists x A(x)$ e $\exists x A(x)$ è chiusa $\Longrightarrow$ esiste t chiuso tale che $T \vdash^{CL} A(t)$).

Lo studio dei sistemi semicostruttivi e costruttivi è di rilevanza informatica, soprattutto per quanto riguarda il problema della sintesi dei programmi [4,5] e quello della estensione dei tipi di dati astratti [1,2]; per una trattazione sufficientemente dettagliata e unificata di questi aspetti, da cui la presente ricerca ha preso le mosse, rimandiamo a [2]. Nel presente contesto saremo invece interessati a esporre risultati orientati ad una classificazione della mutua "compatibilità costruttiva" di vari principi logici e matematici. In tal senso, la presentazione di un certo numero di sistemi <u>grandi</u> può risultare di interesse logico oltre che informatico. Col termine "grandi" vogliamo mettere in evidenza che tali sistemi intendono essere (e sono) più potenti dei sistemi costruttivi usualmente trattati nella tradizione logica: e in effetti, lo scopo della ricerca qui esposta non è quello di scegliere e/o giustificare un particolare orizzonte semantico e di definire qualche sistema formale che ad esso si adegui, ma di individuare i più ampi frammenti possibili di certi sistemi classici che siano costruttivi (o semicostruttivi) ed <u>effettivi</u> (cioè, assiomatizzabili).

La tecnica che abbiamo utilizzato per definire i sistemi effettivi che presenteremo, consiste nella definizione (mediante opportuni criteri semantici) di insiemi <u>non effettivi</u> di formule che soddisfano PD, PED e le usuali regole di inferenza. Tali insiemi sono visti come una sorta di "confini superiori": nell'ambito di essi, mediante teoremi di validità, si individuano principi logici e matematici che danno luogo a sistemi semicostruttivi effettivi; indebolendo questi ultimi sistemi, si può pervenire a sistemi effettivi (pienamente) costruttivi. Per ragioni di spazio illustreremo solo a grandi linee, e per il caso più semplice, questa tecnica, mentre per una breve illustrazione relativa ad un caso qui esposto senza giustificazione, rimandiamo a [7]; una trattazione dettagliata e completa si può trovare in [6].

2. <u>Teorie con modello isoiniziale e la logica IKA.</u>

Saremo interessati alle teorie che <u>formalizzano completamente un modello isoiniziale</u>, cioè a quelle teorie T che verificano le seguenti proprietà: 1) per ogni formula chiusa F priva di quantificatori, $T \vdash^{CL} F$ o $T \vdash^{CL} \neg F$; 2) esiste un modello M di T, chiamato isoiniziale, tale che ogni elemento del suo supporto è denotato da almeno un termine chiuso del linguaggio.

Le teorie con modello isoiniziale nel senso della caratterizzazione data, per es., in [1,2], possono essere estese, senza alterarne l'assiomatizzabilità e la classe dei modelli, in teorie che formalizzano completamente un modello isoiniziale: l'aggiunta di un diagramma ricorsivo è sufficiente. Tali teorie, in [1,2], sono proposte come le teorie che caratterizzano la nozione intuitiva di "tipo di dati astratto".

Le logiche che considereremo in seguito saranno tutte estensioni di una logica di base, che chiameremo IKA: IKA si ottiene aggiungendo a INT il principio (K) di Kuroda e la seguente <u>legge della doppia negazione ristretta alle formule atomiche</u>:

(AT) $\neg\neg A \rightarrow A$, per ogni A atomica.

La presenza di (K) e di (AT) in IKA permette di dimostrare il seguente fatto (si veda [2]):

(I) Se T formalizza completamente un modello isoiniziale, allora, per ogni formula chiusa F priva di quantificatori, $T \vdash^{IKA} F$ o $T \vdash^{IKA} \neg F$.

3. <u>Schema di induzione, schema delle catene discendenti e altri assiomi matematici.</u>

Una teoria che formalizza completamente un modello isoiniziale può ben contenere un <u>principio di induzione</u> e un <u>principio delle catene discendenti</u>. Questi principi saranno dati nella forma di <u>schemi di assiomi</u> (senza alcuna restrizione) e saranno distinti dagli altri assiomi matematici, per i quali sarà necessario imporre delle restrizioni per ottenere risultati di costruttività; salvo avviso contrario, il termine "assioma" escluderà lo schema d'induzione e quello delle catene discendenti.

La forma più generale dello schema di induzione sarà la seguente:

(SIND) $A(c0) \wedge .. \wedge A(cm) \wedge \forall x1 .. \forall xk1 (A(x1) \wedge .. \wedge A(xk1) \rightarrow$
$\rightarrow A(f1(x1,..,xk1))) \wedge .. \wedge \forall x1 .. \forall xkn (A(x1) \wedge .. \wedge A(xkn) \rightarrow$
$\rightarrow A(fn(x1,..,xkn))) \rightarrow \forall y A(y)$, per ogni A del linguaggio (dove c0,..,cm sono costanti del linguaggio e dove f1,..,fn sono simboli di funzione del linguaggio di arità, rispettivamente, k1,..,kn).

Diremo che una teoria <u>T contiene (SIND) appropriatamente</u> see T formalizza completamente un modello isoiniziale e ogni elemento del supporto di un modello isoiniziale di T è rappresentato da un termine chiuso costruito unicamente con le costanti c0,..,cm e con i simboli di funzione f1,..,fn.

Lo schema delle catene discendenti è così definito: (SDC) $\exists xA(x)\wedge\forall x(A(x)\longrightarrow\exists y(A(y)\wedge y<x)\vee B)\longrightarrow B$, per ogni A e B del linguaggio, B non contenente x libera.

Diremo che <u>T contiene (SDC) appropriatamente</u> sse T formalizza completamente un modello isoiniziale e $<$ è assiomatizzato in T come un ordinamento parziale irriflessivo che è ben fondato in ogni modello isoiniziale di T.

In generale, usando la logica classica, si può dedurre (SIND) da (SDC); questo non vale per le logiche costruttive che considereremo noi, nel cui contesto i due schemi risulteranno indipendenti.

Per quanto riguarda gli assiomi (propriamente detti) di una teoria, considereremo le seguenti restrizioni.

Una <u>$\forall$-formula</u> è una formula del tipo $\forall \underline{x}H$, con H priva di quantificatori; una <u>$\exists$-formula</u> è una formula del tipo $\exists\underline{x}H$, con H priva di quantificatori; una <u>$\forall\exists$-formula</u> è una formula del tipo $\forall\underline{x}\exists\underline{y}H$, con H priva di quantificatori (nei tre casi, $\underline{x}$ e $\underline{x},\underline{y}$ possono essere insiemi vuoti di variabili).

Una <u>$\forall\exists\neg$-formula</u> è induttivamente così definita: ogni $\forall\exists$-formula e ogni formula del tipo $\neg A$ sono $\forall\exists\neg$-formule; se A e B sono $\forall\exists\neg$-formule e C è una formula qualunque, allora $A\wedge B$, $C\longrightarrow A$ e $\forall xA$ sono $\forall\exists\neg$-formule.

Le $\forall\neg$-formule sono definite in modo analogo, prendendo le $\forall$-formule al posto delle $\forall\exists$-formule nella clausola di base (si noti che le $\forall\exists\neg$-formule contengono propriamente le $\forall\neg$-formule e che queste ultime contengono le Harrop-formule, definite, per es., in [8]).

4. <u>L'ambito costruttivo $\overline{BD}(T)$; sistemi effettivi delimitati da $\overline{BD}(T)$.</u>

Anzitutto definiremo induttivamente la nozione di "formula ben data in una collezione $\mathcal{C}$ di formule chiuse". Diremo che A è <u>ben data</u> in $\mathcal{C}$ (abbreviato da "A è b.d. in $\mathcal{C}$") sse $A\in\mathcal{C}$ e una delle seguenti clausole è soddisfatta: 1) A è atomica, o $A=\neg B$ per qualche B; 2) $A=B\wedge C$, e B è b.d. in $\mathcal{C}$ e C è b.d. in $\mathcal{C}$; 3) $A=B\vee C$, e B è b.d. in $\mathcal{C}$ o C è b.d. in $\mathcal{C}$; 4) $A=B\longrightarrow C$, e se B è b.d. in $\mathcal{C}$ allora C è b.d. in $\mathcal{C}$; 5) $A=\exists xB(x)$, e esiste t tale che B(t) è b.d. in $\mathcal{C}$; 6) $A=\forall xB(x)$, e per ogni termine chiuso t la formula B(t) è b.d. in $\mathcal{C}$.

Ora, sia T una teoria con insieme di termini chiusi non vuoto e sia $\mathcal{C}(T)=\{A\ /\ A$ è chiusa e $T\vdash^{CL}A\}$; definiremo allora l'insieme di formule chiuse BD(T) come segue:
$BD(T)=\{A\ /\ A$ è b.d. in $\mathcal{C}(T)\}$.

L'insieme di formule aperte e chiuse $\overline{BD}(T)$ risulta poi così definito:
$\overline{BD}(T)=BD(T)\cup\{A\ /\ A$ è aperta e la sua chiusura universale appartiene a $BD(T)\}$.

Il seguente fatto è di facile dimostrazione:
(II) $\overline{BD}(T)$ è un insieme di formule chiuso rispetto a PD, PED, MP , alla regola predicativa di particolarizzazione RP e alla regola predicativa di generalizzazione RG.

Vale anche il seguente risultato di massimalità:
<u>Teorema 1.</u>Sia $\overline{\mathcal{C}}$ un qualunque insieme di formule chiuso rispetto a PD, PED, MP, RP e RG tale che $\overline{BD}(T)\subseteq\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}(T)$: allora $\overline{\mathcal{C}}=\overline{BD}(T)$. ■

Noi siamo interessati a sottosistemi effettivi di $\overline{BD}(T)$ nel caso in cui T formalizza completamente un modello isoiniziale; allo scopo, introdurremo i seguenti principi logici:
(M) $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))\wedge\neg\neg\exists xA(x)\rightarrow\exists xA(x)$;
(P1) $(\forall x(A(x)\longrightarrow B(x))\longrightarrow\exists x(A(x)\vee C(x)))\longrightarrow\exists x(A(x)\vee C(x))$, purchè valga $T\vdash^{CL}\forall x(A(x)\longrightarrow B(x))$ (dove A,B e C sono arbitrarie);
(P2) $(\forall x(A(x)\longrightarrow B(x))\longrightarrow\forall x(A(x)\vee C(x)))\longrightarrow\exists xA(x)\vee C(t)$, purchè $T\vdash^{CL}\forall x(A(x)\longrightarrow B(x))$ (dove A,B e C sono formule arbitrarie e t è un termine arbitrario).

Il principio (M) è il ben noto principio di Markov [8], mentre (P1) e (P2) sono, per quanto ne sappiamo, nuovi; sia (P1) che (P2) permettono di dedurre, con l'uso della logica intuizionista, il ben noto schema
$((\neg\neg A\longrightarrow A)\longrightarrow\neg A\vee\neg\neg A)\longrightarrow\neg A\vee\neg\neg A$
studiato da Rose.

Chiameremo ESTlKAl la logica ottenuta aggiungendo a IKA i principi (M), (P1) e (P2); vale il seguente teorema, che ci permette di caratterizzare una classe significativa di sistemi effettivi semicostruttivi:
<u>Teorema 2.</u> Sia T una teoria (assiomatizzabile) che formalizza completamente un modello isoiniziale, contenente (SIND) e (SDC) appropriatamente e tale che tutti i suoi assiomi (propriamente detti) sono $\forall\exists\neg$-formu-

le: allora $T\vdash^{ESTIKA1} A$ implica $A\in\overline{BD}(T)$. ■

Due indebolimenti dei principi (P1) e (P2) sono i seguenti:
(DP1) $(\forall x(A(x)\to B(x))\to\exists x(A(x)\vee\neg C(x)))\to\exists x(\neg\neg A(x)\vee\neg C(x))$, purchè $T\vdash^{CL}\forall x(A(x)\to B(x))$;
(DP2) $(\forall x(A(x)\to B(x))\to\forall x(A(x)\vee\neg C(x)))\to\exists x\neg\neg A(x)\vee\neg C(t)$, purchè $T\vdash^{CL}\forall x(A(x)\to B(x))$.

Aggiungendo (M), (DP1) e (DP2) alla logica IKA, si ottiene la logica DESTIKA1, che ci permette di caratterizzare una classe di sistemi effettivi (pienamente) costruttivi:

Teorema 3. Se T soddisfa le ipotesi del Teorema 2, allora T+DESTIKA1 è costruttivo. ■

Per una dimostrazione del Teorema 2 e per una dimostrazione del Teorema 3 a partire dal Teorema 2, rimandiamo il lettore a [6].

5. Altri sistemi effettivi.

Per introdurre sistemi formali alternativi a quelli esposti nel paragrafo precedente, abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari.

Siano $U(\underline{y})$ e $V(\underline{y},\underline{z})$ formule contenenti libere al massimo le variabili indicate; diremo che C è una formula in U, $U\to V$, $\underline{y}$ sse C soddisfa una delle seguenti clausole induttive: 1)$C=U(\underline{t})$, dove le possibili variabili dei termini $\underline{t}$ sono in $\underline{y}$; 2)$C=U(\underline{t})\to V(\underline{t},\underline{t}')$, dove le possibili variabili di $\underline{t}$ e $\underline{t}'$ sono in $\underline{y}$; 3)$C=\neg C'$, o $C=C1\wedge C2$, o $C=C1\vee C2$, o $C=C1\to C2$, con C', C1 e C2 formule in U, $U\to V$, $\underline{y}$; 4)$C=\exists vC'(v)$, o $C=\forall vC'(v)$, con $v\in\underline{y}$ e C' una formula in U, $U\to V$, $\underline{y}$.

Diremo che A è T-stabile sse A soddisfa una delle seguenti clausole induttive: 1)A è atomica o è del tipo $\neg B$; 2) A è una $\exists$-formula e $T\vdash^{CL} A$; 3)$A=B\wedge C$, o $A=B\vee C$, o $A=B\to C$, con B e C T-stabili; 4)$A=\forall xB(x)$, con B(x) T-stabile.

Diremo che C è negativamente satura sse ogni occorrenza in C di un quantificatore è nel campo d'azione di una negazione.

Diremo che C è quasi negativamente satura sse $C=\exists zB(\underline{z})$, con $B(\underline{z})$ negativamente satura.

Introdurremo ora le seguenti due famiglie di principi logici:

(Q$\forall$) $(\forall x(\neg\neg H(x)\wedge\neg\neg K(x)\to\forall\underline{y}\neg U(\underline{y}))\to((\forall x(H(x)\to K(x))\to C\vee D))\to(\forall x(\neg\neg H(x)\wedge\neg\neg K(x)\to\forall\underline{y}\neg U(\underline{y}))\to((\forall x(H(x)\to K(x))\to C)\vee((\forall x(H(x)\to K(x))\to D))$, dove C è una qualunque formula in U, $U\to V$, $\underline{y}$ (D è arbitraria);
(Q$\exists$) $(\forall x(\neg\neg H(x)\wedge\neg\neg K(x)\to\forall\underline{y}\neg U(\underline{y}))\to((\forall x(H(x)\to K(x))\to\exists wC(w)))\to(\forall x(\neg\neg H(x)\wedge\neg\neg K(x)\to\forall\underline{y}\neg U(y))\to\exists w(\forall x(H(x)\to K(x))\to C(w)))$, dove C(w) è una qualunque formula in U, $U\to V$, $\underline{y}$.

Se ci si limita al caso in cui K(x) è T-stabile, le regole (Q$\forall$) e (Q$\exists$) diventano, rispettivamente, (RQ$\forall$) e (RQ$\exists$). L'aggiunta delle regole (RQ$\forall$) e (RQ$\exists$) a IKA produce la logica ESTIKA2. Vale il seguente:

Teorema 4. Sia T una teoria (assiomatizzabile) che formalizza completamente un modello isoiniziale, contenente (SIND) e (SDC) appropriatamente e tale che tutti i suoi assiomi (propriamente detti) sono $\forall\exists$-formule o $\forall\neg$-formule: allora T+ESTIKA2 è semicostruttivo. ■

Noteremo che i sistemi deduttivi del Teorema 4 sono "costruttivamente incompatibili" con quelli del Teorema 2 e del Teorema 3; in effetti, (RQ$\forall$) e (RQ$\exists$) permettono di dedurre, con l'uso della logica intuizionista, i due principi di Kreisel e Putnam (incompatibili con (M) [8]):
(KP$\forall$) $(\neg A\to B\vee C)\to(\neg A\to B)\vee(\neg A\to C)$;
(KP) $(\neg A\to\exists xB(x))\to\exists x(\neg A\to B(x))$ (con x non libera in A).

Se ci si limita al caso in cui D è negata e C è quasi negativamente satura, le regole (RQ$\forall$) e (RQ$\exists$) diventano, rispettivamente, (DRQ$\forall$) e (DRQ$\exists$). Dalle regole (DRQ$\forall$) e (DRQ$\exists$) non è possibile, in generale, dedurre (KP$\forall$) e (KP$\exists$); così definiremo DESTIKA2 come la logica ottenuta aggiungendo a IKA le regole (DRQ$\forall$), (DRQ$\exists$), (KP$\forall$) e (KP$\exists$) (tale logica è una sottologica di ESTIKA2). Vale per DESTIKA2 il seguente risultato di (piena) costruttività:

Teorema 5. Se T soddisfa le ipotesi del Teorema 4, allora T+DESTIKA2 è costruttivo. ■

Se in (Q$\forall$) ci si limita al caso in cui C è negativamente satura (mentre K(x) può essere arbitraria), si ottiene la regola (NSQ$\forall$); se in (NSQ$\forall$) ci si limita al caso in cui D è negata, si ottiene la regola (DNSQ$\forall$). Le logiche ESTIKA3 e DESTIKA3 si ottengono aggiungendo a IKA, rispettivamente, (KP$\forall$) e (NSQ$\forall$), e (KP$\forall$) e (DNSQ$\forall$). Valgono i seguenti teoremi:

Teorema 6. Sia T una teoria (assiomatizzabile) che formalizza completamente un modello isoiniziale, contenente (SIND) appropriatamente, priva di (SDC) e tale che tutti i suoi assiomi (propriamente detti) sono $\forall\exists$-formule o $\forall\neg$-formule: allora T+ESTIKA3 è semicostruttivo. ∎

Teorema 7. Se T soddisfa le ipotesi del teorema 6, allora T+DESTIKA3 è costruttivo. ∎

Noteremo che i sistemi deduttivi del Teorema 6 sono "costruttivamente incompatibili" con quelli del Teorema 2 e quelli del Teorema 4: infatti, si può dimostrare che per teorie opportune T che soddisfano le ipotesi del Teorema 6 (e dunque del Teorema 2) l'aggiunta di (M) a T+ESTIKA3 produce un sistema che non è semicostruttivo; analogamente, si può far vedere che esistono teorie T che soddisfano le ipotesi del Teorema 6 (e dunque del Teorema 4) tali che l'aggiunta di (KP$\exists$) a T+ESTIKA3 produce un sistema che non è semicostruttivo.

Nel contesto di teorie deboli (prive di (SIND) e di (SDC)) è possibile la "compatibilità costruttiva" di principi più forti di (M) e delle regole (Q$\vee$) e (Q$\exists$). A questo proposito ricorderemo che il principio di Grzegorczyk
(G) $\forall x(A \vee B(x)) \rightarrow A \vee \forall x B(x)$, per ogni A e B(x), con x non libera in A
permette di dedurre, con le regole della logica intuizionista, (M). Ora, sia ESTIKA4 la logica ottenuta aggiungendo (Q$\vee$), (Q$\exists$) e (G) a IKA (si noti che (Q$\vee$) e (Q$\exists$) sono prese senza alcuna restrizione); vale il seguente:

Teorema 8. Sia T una teoria (assiomatizzabile) priva di (SIND) e di (SDC) e tale che tutti gli assiomi di T sono Harrop-formule (T può anche non avere modello isoiniziale): allora T+ESTIKA4 è semicostruttivo. ∎

Se nelle regole (Q$\vee$) e (Q$\exists$) ci si limita a C quasi negativamente satura e a D negata, si ottengono, rispettivamente, le regole (DQ$\vee$) e (DQ$\exists$). La logica DESTIKA4 si ottiene aggiungendo a IKA le regole (DQ$\vee$), (DQ$\exists$), (KP$\vee$), (KP$\exists$) e (G); vale il seguente:

Teorema 9. Se T soddisfa le ipotesi del Teorema 8, allora T+DESTIKA4 è costruttivo. ∎

Vogliamo infine presentare le due logiche ESTIKA5 e DESTIKA5: la prima si ottiene aggiungendo a IKA le regole (P1), (P2) e (G); la seconda si ottiene aggiungendo a IKA le regole (DP1), (DP2) e (G). Valgono i seguenti teoremi.

Teorema 10. Se T soddisfa le ipotesi dei Teoremi 8 e 9, allora T+ESTIKA5 è semicostruttivo. ∎

Teorema 11. Se T soddisfa le ipotesi dei Teoremi 8,9 e 10, allora T+DESTIKA5 è costruttivo. ∎

Bibliografia.

1. Bertoni A., Mauri G., Miglioli P. - On the power of model theory to specify abstract data types and to capture their recursiveness - Fundamenta Informaticae IV.2, 1983.
2. Bertoni A., Mauri G., Miglioli P., Ornaghi M. - Abstract data types and their extensions within a constructive logic - Lect. Notes in Comp. Sci., n. 173, Springer, 1984.
3. Chang C., Keisler H. - Model theory - North Holland, 1973.
4. Degli Antoni G., Miglioli P., Ornaghi M. - Top-down approach to the synthesis of programs - Proc. Coll. sur la Programmation, Paris 1974, Lect. Notes in Comp. Sci. n. 19, Springer, 1974.
5. Miglioli P., Ornaghi M. - A logically justified model of computation I,II - Fundamenta Informaticae IV.1,2, 1981.
6. Miglioli P., Moscato U., Ornaghi M. - Constructive theories with superintuitionistic deductive systems: some results and techniques - Internal report of the Dipartim. di Scienze della Informazione dell'Università di Milano, 1986.
7. Miglioli P., Moscato U., Ornaghi M. - Constructive theories with abstract data types for program synthesis - Apparirà negli Atti del prossimo Simposio di Logica dedicato all'ottantesimo compleanno di Gödel, che si terrà in Bulgaria dal 25 settembre al 5 ottobre 1986.
8. Troelstra A.S. - Metamathematical investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis - Lect. Notes in Math., n.344, Springer, 1973.