Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

OSSERVAZIONI SULLA CONGETTURA DI TAKEUTI

FLAVIO PREVIALE
Torino

La congettura di Takeuti (1953) asserisce l'esistenza di una forma normale (senza tagli) per ogni derivazione del sistema sequenziale per la logica classica di ordine ω (teoria dei tipi semplici), qui denotato con LC. Tale congettura estende un risultato di Gentzen (Hauptsatz) per il corrispondente sistema del 1° ordine LC_0. Com'è noto, negli anni 1966-67 Tait, Takahashi e Prawitz diedero della congettura dimostrazioni semantiche, basate sulla logica classica. In vista delle applicazioni alla teoria della dimostrazione, sarebbe stata più utile una dimostrazione di natura intuizionistica (pur se, inevitabilmente, come già messo in luce dallo stesso Takeuti, non predicativa e quindi non costruttiva in senso stretto). Un tal tipo di dimostrazione non è stato a tutt'oggi trovato; in compenso sono state ottenute dimostrazioni intuizionistiche per una classe affine di risultati, che permettono di ottenere ugualmente le desiderate applicazioni alla teoria della dimostrazione. Alludiamo ai risultati di normalizzabilità per i sistemi di deduzione naturale, intuizionistico o classico, del 2° ordine o di ordine superiore. Tali risultati si basano su un'idea di Girard (1971); va tuttavia rilevato il carattere non banale dell'adattamento, dovuto a Prawitz (1981), dell'originaria dimostrazione di Girard (concepita per il caso intuizionistico) al caso classico. Prawitz privilegia inoltre i risultati di normalizzabilità forte; ricordiamo che una deduzione si dice fortemente normalizzabile relativamente a una classe di "riduzioni", prestabilita in modo che una deduzione irriducibile sia sempre normale, allorchè ogni sequenza di riduzioni con inizio la data deduzione termina (in una deduzione normale). Un teorema di normalizzazione forte risolve nel modo più netto il problema di esibire un algoritmo di normalizzazione.

I risultati testè menzionati hanno distolto l'attenzione dei logici dall'originaria congettura. Ma l'interesse matematico, se non filosofico, della congettura resta intatto. Si può osservare che i risultati di normalizzazione per i sistemi di deduzione naturale forniscono indirettamente soluzioni parziali della congettura. La situazione è la seguente. Indichiamo con LJ la versione intuizionistica di LC, e con LC^- e LJ^- i frammenti negativi di LC e LJ (cioè questi stessi privati delle costanti logiche $\vee$ e $\exists$). Indichiamo pure con NC, NJ, NC^-, NJ^- i sistemi di deduzione naturale ordinatamente corrispondenti ai quattro sistemi sequenziali considerati. Tra LJ^- e NJ^- esiste una relazione molto stretta: Ogni sequenza di riduzioni alla Gentzen (1935) per una derivazione di LJ^- è omomorfa a una sequenza di riduzioni alla Prawitz (1965) per una deduzione (corrispondente) di NJ^-; inoltre la corrispondenza tra sequenze di riduzioni alla Gentzen e sequenze di riduzioni alla Prawitz è suriettiva (Zucker, 1974). Da ciò discende che i problemi di normalizzazione forte per LJ^- e NJ^- sono essenzialmente equivalenti, e che pertanto la soluzione positiva del secondo implica una soluzione positiva del primo.

La relazione tra LJ e NJ è meno stretta. Tuttavia il teorema di normalizzazione per NJ implica l'esistenza di un procedimento di normalizzazione per LJ (non basato sulle riduzioni di Gentzen). Infatti una derivazione di LJ induce in maniera canonica (pur se anomala, in quanto LJ non costituisce la forma sequenziale del sistema deduttivo NJ) una deduzione di NJ; d'altra parte una deduzione normale di NJ induce con procedimento canonico inverso

una derivazione senza tagli di LJ. E' pure possibile evitare il ricorso a NJ, in quanto non è difficile tradurre il doppio passaggio da LJ a NJ e viceversa in un processo di normalizzazione operante all'interno di LJ. Si può anzi isolare una adeguata classe di riduzioni per LJ (diversa da quella di Gentzen) rispetto a cui vale un teorema di normalizzazione forte (facilmente derivabile dal teorema di normalizzazione forte per NJ).

Il metodo appena descritto può venir applicato anche a LC^- e NC^-. Ora però entrambe le trasformazioni di una derivazione di LC^- in una deduzione di NC^- e di una deduzione normale di NC^- in una derivazione senza tagli di LC^- risultano alquanto indirette. In particolare non vi è un semplice modo di tradurre la doppia trasformazione in una procedura di normalizzazione operante all'interno di LC^-. Se si cerca poi di estendere il precedente metodo al sistema completo LC, ci si imbatte in una nuova difficoltà: il sistema classico NC non ammette una buona teoria della normalizzazione, in quanto non è possibile dare per esso una semplice definizione di deduzione "normale". Ciò che, al contrario, rende possibile sviluppare una teoria della normalizzazione per NC^- è il fatto che in tale sistema l'uso della regola di inferenza classica della doppia negazione (d.n.) può venir ristretto, senza perdita di potere deduttivo (e anzi mediante appropriate riduzioni) al caso di una formula atomica. In NC ciò non è possibile.

Un modo per aggirare il precedente ostacolo consiste nel modificare il sistema NC rimpiazzando le quattro regole di inferenza concernenti le costanti logiche $\vee$ e $\exists$ con le quattro che si ottengono spezzando in due le equivalenze classiche:

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B) \qquad \exists x A \equiv \neg(\forall x \neg A) .$$

Nel sistema così ottenuto, che indichiamo con NC*, la regola ristretta della d.n. risulta adeguata ed è pertanto possibile sviluppare una teoria della normalizzazione e (molto verosimilmente) dimostrare un teorema di normalizzazione (forte). Usando una doppia trasformazione da LC a NC* e viceversa è poi certamente possibile ricavare da tale teorema un risultato di normalizzabilità per LC. Anche in questo caso tuttavia il metodo indicato è (o sarebbe) di scarsa utilità pratica; in particolare non fornisce alcuna indicazione per una procedura di normalizzazione interna a LC.

In definitiva, anche se appare fuori discussione la possibilità di dimostrare intuizionisticamente la congettura di Takeuti, non disponiamo ancora di un metodo (ragionevolmente) effettivo di normalizzazione per i sistemi sequenziali classici. Come già visto per LJ (e al contrario di quanto accade per il sottosistema LJ^-), le riduzioni considerate da Gentzen per la logica del 1° ordine non sembrano adeguate per la logica di ordine superiore. Per quanto riguarda invece la logica del 1° ordine, non solo LC_0 (così come LJ_0) ammette un procedimento (algoritmico) di normalizzazione basato su tali riduzioni (come provato da Gentzen); ma per tale classe di riduzioni vale un teorema di normalizzazione forte. Di quest'ultimo risultato (poco noto) indichiamo una semplice dimostrazione, ottenuta modificando lievemente l'originaria dimostrazione dell'Hauptsatz di Gentzen.

Nella dimostrazione ci riferiremo alla versione di LC_0 in cui l'antecedente e il conseguente di una sequenza $\Gamma \vdash \Delta$ sono insiemi, anzichè successioni, cosicchè le regole di scambio e di contrazione risultano superflue e non è necessario modificare la regola di taglio. Per provare il teorema di normalizzazione forte basta ovviamente provare quanto segue: Sia D una derivazione ottenuta applicando un taglio a due derivazioni D_1 e D_2, rispettiv. di $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$ e $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$ (A è la formula di taglio); se D_1 e D_2 sono fortemente normalizzabili, pure D lo è (a differenza che nella dimostrazione di semplice normalizzabilità, non si può

supporre D_1 e D_2 già normali). Com'è noto, la dimostrazione di Gentzen procede per induzione rispetto alla coppia: 1) <u>grado</u> di A, 2) somma del <u>rango destro</u> di A in D_1 e del <u>rango sinistro</u> di A in D_2. Ad esempio, il rango destro di A in D_1 è il massimo numero di sequenze consecutive contenenti A nel conseguente che si incontrano risalendo D_1 lungo un qualsiasi ramo. Nell'attuale dimostrazione occorre rimpiazzare il <u>rango</u> con il <u>rango forte</u>; ad esempio, il rango forte destro di A in D_1 è il massimo rango destro di A in una qualsiasi ridotta D_1' di D_1. Tale nozione ha senso per la forte normalizzabilità di D_1 e D_2; l'uso del Lemma di König può essere evitato intendendo la forte normalizzabilità direttamente come finitezza dell'albero delle (sequenze di) riduzioni. La dimostrazione del teorema di normalizzazione forte viene condotta per induzione rispetto alla terna: 1) grado di A, 2) somma del rango forte destro di A in D_1 e del rango forte sinistro di A in D_2, 3) somma dell'altezza dell'albero delle riduzioni di D_1 e dell'altezza dell'albero delle riduzioni di D_2. Ispezionando le varie possibilità di riduzione si può verificare che la forte normalizzabilità di una qualsiasi ridotta D' di D (e dunque la forte normalizzabilità della stessa D) discende dall'ipotesi induttiva riferita a derivazioni aventi la stessa forma terminale di D, ma terna di indici precedente a quella di D nell'ordine lessicografico delle terne di interi.

BIBLIOGRAFIA

GENTZEN, G. (1935), Investigations into logical deduction, The collected papers of Gerhardt Gentzen (a cura di M.E. Szabo), North Holland, 1969

GIRARD, J.Y. (1971), Une extension de l'interpretation de Gödel à l'Analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'Analyse et la théorie des types, Proc. of the Second Scandinavian Logic Symposium (a cura di E. Fenstad), North-Holland, 1971

PRAWITZ, D. (1965), Natural deduction. A proof-theoretical study, Almqvist & Wiksell, Stockolm, 1965

PRAWITZ, D. (1981), Validity and normalizability of proofs in 1-st and 2-nd order classical and intuitionistic logic, Atti del I Congresso Italiano di Logica, Bibliopolis, 1981

TAKEUTI, G. (1953), On a generalized logical calculus, Japanese Journal of Mathematics, vol. 23, 1953

ZUCKER, J. (1974), The correspondence between cut-elimination and normalization, Annals of mathematical Logic, vol. 7, 1974