Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

STABILITÀ IN TEORIA DEI MODELLI CON APPLICAZIONI ALL'ALGEBRA

ANNALISA MARCJA
Trento

In [Mr] veniva descritta la teoria della classificazione di Shelah. In questo articolo, che può essere visto come un'appendice a [Mr] voglio dare un cenno delle possibili applicazioni di questa teoria all'algebra.

Notiamo che i problemi che si presentano possono essere di due tipi:

<u>Problema</u> 1. Data una classe K di strutture (algebriche, relazionali, algebrico-relazionali) caratterizzare gli elementi di K che abbiano "buone proprietà" per la classificazione.

<u>Problema</u> 2. Tradurre i concetti generali elaborati nella teoria, secondo la struttura algebrica di K.

Risolvere 1 non presuppone risolvere 2 e mentre per il problema di tipo 1 esistono già delle buone tecniche di soluzione, per alcune strutture la ricerca per il problema 2 è appena iniziata.

Nel seguito cercherò di accennare ai risultati ottenuti per il problema 1 facendo riferimento a [Mr].Sono da consigliare anche [T1], [T2], in cui alcune applicazioni sono trattate più in dettaglio e da cui ho ampiamente ripreso.

Ricordo che se T è una teoria del I ordine, contabile, completa, priva di modelli infiniti, $I(T,\lambda)$ rappresenta il cardinale dell'insieme dei tipi di isomorfismo dei modelli di T di cardinalità λ. Chiamando T <u>non classificabile</u> se per ogni λ non contabile $I(T,\lambda)=2^{\lambda}$, Shelah ha dimostrato che:

"Se T è instabile, o stabile non superstabile, o superstabile ma non presentabile, oppure superstabile presentabile o profonda o senza la proprietà di esistenza, allora T non è classificabile; altrimenti $I(T,\aleph_\alpha) < \beth_{\omega 1}(|\alpha|)$."

Per le teorie ω-stabili, T è classificabile se e solo se T è presentabile e poco profonda.

L'articolo ha il seguente schema:

Nel paragrafo 1 vengono date le soluzioni positive del problema 1. per la classe dei moduli su un anello contabile e per la classe dei campi.

Nei paragrafi 2 e 3 sono illustrate invece le difficoltà per le classi dei gruppi e degli anelli, rispettivamente.

Nel paragrafo 4, per completare il quadro, dò un cenno delle critiche alla teoria della classificazione e delle possibili soluzioni alternative.

1. <u>Moduli</u> (cfr. [Z])

Sia R un anello contabile con unità. L_R sia il linguaggio contenente $0, +, -$ e un simbolo funzionale unario f_r, per ogni $r \in R$. (Scriverò rx invece di $f_r(x)$). E' facile scrivere gli assiomi della teoria T_R dei moduli sinistri su R: M indicherà un modello di T_R.

<u>Definizione</u> 1.1

Un'<u>equazione</u> è una formula del tipo $r_1v_1+\ldots+r_mv_m=0$. Una <u>formula positiva primitiva</u> (pp-formula) è una formula della forma $\exists\bar{w}(\gamma_1\wedge\ldots\wedge\gamma_n)$ dove le γ_i sono equazioni. Osserviamo che se M è un modulo e $\phi(v,\bar{w})$ una formula positiva primitiva, $\phi(M,\bar{0})$ (cioè l'insieme degli elementi di M soddisfacenti $\phi(v,\bar{0})$) è un sottogruppo di M, chiamato <u>sottogruppo</u> pp-<u>definibile</u>. Inoltre, per ogni sequenza $\bar{a}$ di elementi di M $\phi(M,\bar{a})=\emptyset$ oppure è una classe laterale di $\phi(M,\bar{0})$.

Vale il

Teorema 1.2 ([B], [Mo]).

Per ogni R-modulo M, ogni L_R-formula è equivalente in $Th(M)$ a una combinazione booleana di formule primitive positive.

Da questo teorema segue che ogni sottoinsieme definibile di M è combinazione booleana di laterali di sottogruppi pp-definibili di M. Di più, se p è un tipo su M ($p \in S(M)$) esso è assiomatizzato da $p^+ \cup p^-$ e caratterizzato da p^+, dove:

$$p^+ = \{\phi(v,\bar{m}) \in p : \phi(v,\bar{w}) \text{ pp-formula } \bar{m} \in M\}$$

$$p^- = \{\neg\phi(v,\bar{m}) \in p : \phi(v,\bar{w}) \text{ pp-formula } \bar{m} \in M\}.$$

Il seguente teorema è la soluzione al problema 1, per la classe dei moduli.

Teorema 1.3

1. (Fisher, [F]). Ogni modulo è stabile.
2. (Macintyre-Garavaglia [G]). M è superstabile se e solo se non c'è alcuna sequenza discendente infinita di sottogruppi pp-definibili

$$\phi_o(M) \supseteq \phi_1(M) \supseteq \ldots \supseteq \phi_n(M) \supseteq \ldots \qquad (n \in \omega)$$

tale che, per ogni $n \in \omega$, $\phi_{n+1}(M)$ ha indice infinito in $\phi_n(M)$.

3. (Macintyre-Garavaglia [G]). M è ω-stabile se e solo se M non ha alcuna sequenza discendente infinita di sottogruppi pp-definibili

$$\phi_o(M) \supseteq \phi_1(M) \supseteq \ldots \supseteq \phi_n(M) \supseteq \ldots \qquad (n \in \omega)$$

tale che per ogni $n \in \omega$ $\phi_{n+1}(M) \neq \phi_n(M)$.

4. (Ziegler [Z] Teor. 10.1). Ogni modulo superstabile è classificabile.

Nel caso particolare di $R=\mathbb{Z}$ (nel caso cioè della classe dei gruppi abeliani) la caratterizzazione dei membri superstabili si può trovare in [EF]. Macintyre [M1] ha provato che un gruppo abeliano è ω-stabile se e solo se è somma diretta di un gruppo divisibile e di un gruppo di esponente finito.

Una classificazione di tutte le possibili funzioni $\lambda \to I(T,\lambda)$ (funzioni spettro) (λ cardinale non contabile) per T teoria completa di moduli si trova in [Z].

2. Campi

Per la classe dei campi le soluzioni ai problemi 1 e 2 sono complete. Esse sono contenute nel teorema 2.1 per quanto riguarda il problema della classificazione, mentre sono già state illustrate in [Mr] per quanto riguarda il problema 2. E' da notare comunque che è ancora aperto il problema della caratterizzazione dei campi stabili.

Teorema 2.1

Sia K un campo infinito. Sono equivalenti le proposizioni:

1) K è superstabile;

2) K è ω-stabile;

3) K è classificabile;

4) K è algebricamente chiuso.

Le implicazioni non banali di questo teorema sono la 2) $\Rightarrow$ 4) dovuta a Macintyre [M2] e la 1) $\Rightarrow$ 4) dovuta a Cherlin e Shelah [CS].

L'unica possibile funzione spettro per una teoria completa T di campi algebricamente chiusi è la seguente: $I(T, \aleph_0) = \aleph_0$, $I(T,\lambda) = 1$ per $\lambda > \aleph_0$.

3. Gruppi

Nel paragrafo 1 è stato accennato alla caratterizzazione dei gruppi abeliani superstabili, ω-stabili, classificabili. Se leviamo però l'ipotesi di abelianità la situazione diventa caotica. Già nel caso più vicino a questo, nel caso cioè della classe dei gruppi nilpotenti di classe 2, il problema sembra impossibile.

Il seguente argomento, dovuto a Mekler [Me], mostra che infatti

risolvere il problema 1 per questa classe particolare implicherebbe la risoluzione nel caso generale.

Sia G un gruppo (o più in generale una struttura in un linguaggio finito). E' possibile associare a G un grafo simmetrico, privo di cicli $X(G)$ tale che:

1* G è definibile in $X(G)$;

2* G è elementarmente equivalente a G' se e solo se $X(G)$ è elementarmente equivalente a $X(G')$;

3* G è ω-stabile (superstabile, stabile) se e solo se $X(G)$ lo è.

Si può dimostrare inoltre che $X(G)$ gode anche delle seguenti proprietà: sia R la relazione di $X(G)$

a) per ogni $x,y, \in X(G)$, $x \neq y$, esiste almeno uno $z \in X(G)$ tale che xRz, ma non yRz.

b) per ogni $x,y \in X(G)$ esiste al più un $t \in X(G)$ tale che xRt e yRt. Un simile t non esiste se xRy.

Viceversa sia X un grafo simmetrico, privo di cicli soddisfacente a) e b); è possibile associare a X un gruppo $G(X)$ nilpotente di classe 2 in modo che 1)-3) siano soddisfatte.

Abbiamo quindi che un gruppo G è ω-stabile (superstabile, stabile) se e solo se il gruppo $G(X(G))$ nilpotente di classe 2 lo è.

E' comunque utile enunciare alcune condizioni necessarie perché un gruppo G sia ω-stabile (superstabile, stabile).

Teorema 3.1 (condizione della catena per gruppi stabili).

Se G è un gruppo stabile, per ogni formula $\phi(v,\bar{w})$ non esiste alcuna sequenza strettamente decrescente di sottogruppi

$$\phi(G,\bar{a}_o) \supsetneq \dots \supsetneq \phi(G,\bar{a}_m) \supsetneq \dots$$

dove $m \in \omega$ e $\bar{a}_m \in G$ per ogni $m \in \omega$.

Teorema 3.2 (condizione della catena per gruppi superstabili).

Se G è un gruppo superstabile, allora non esiste alcuna sequenza decrescente

$$H_o \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m \supset \dots \qquad (m \in \omega)$$

dove, per ogni $m \in \omega$, H_m è sottogruppo definibile di G e H_m+1 ha indice infinito in H_m.

Teorema 3.3 (condizione della catena per gruppi ω-stabili).

Se G è un gruppo ω-stabile, allora non esiste alcuna sequenza decrescente

$$H_o \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m \supseteq \dots \qquad (m \in \omega)$$

dove, per ogni $m \in \omega$, H_m è sottogruppo definibile di G e $H_{m+1} \neq H_m$.

Si può notare che i teoremi 3.2 e 3.3 sono le condizioni necessarie

di 2 e 3 del teorema 1.3. E' utile osservare però che esistono gruppi instabili (es. S_3^{ω}) e che, mentre in un modulo M un sottoinsieme definibile è combinazione booleana di classi laterali di sottogruppi (pp) definibili, in un gruppo un sottoinsieme definibile non è in generale una combinazione booleana di classi laterali di sottogruppi definibili e che i sottogruppi definibili non sono in generale normali, né definibili con formule semplici come le pp. formule del caso dei moduli.

Per completare l'argomento vogliamo citare che una classe di gruppi non abeliani, ω-stabili, classificabili studiata recentemente è quella dei gruppi algebrici su un campo K algebricamente chiuso.

4. Anelli

In questo paragrafo mostrerò che anche per la classe degli anelli la risoluzione del problema 1 si riconduce a quella dei gruppi nilpotenti di classe 2.

Definizione 5.1

Sia R un anello, il radicale di Jacobson di R è l'ideale:

$$J(R) = \{a \in R : R \models \forall v \exists \omega (va+\omega+wva=0)\}.$$

Se R è ω-stabile (superstabile, stabile) allora $J(R)$ e $R/J(R)$

sono ω-stabili (superstabili, stabili). $R/J(R)$ è un anello semisemplice; inoltre si può dimostrare che, se R è stabile, allora $J(R)$ è nilpotente cioè esiste $n \in \omega$ tale che per ogni $a_o, \ldots, a_{n-1} \in J(R)$ $\prod_{i<n} a_i = 0$.

Studiare allora gli anelli ω-stabili (superstabili, stabili) si riconduce allo studio a) degli anelli semisemplici ω-stabili (superstabili, stabili) b) degli anelli nilpotenti ω-stabili(superstabili, stabili).

Consideriamo dapprima il caso nilpotente. Sia R un anello nilpotente, e sia n l'esponente di R (ovvero il minimo $n \in \omega$ t.c., per ogni $a_o, \ldots, a_{n-1}, \in R$, $\prod_{i<n} a_i=0$). Se $n=2$, allora la moltiplicazione in R è identicamente nulla, ovvero R è essenzialmente un gruppo abeliano, e quindi il problema si riconduce a quello descritto nel paragrafo 1 e si risolve allo stesso modo.

Sia $n \geq 3$. Usiamo la seguente costruzione.

Definiamo, a partire da un qualunque anello R, un nuovo anello $N(R)$ nel modo seguente: $N(R)$ ha dominio $R \times R$ e le operazioni sono definite da

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \cdot (a',b') = (0, aa')$$

$N(R)$ è un anello nilpotente di esponente 3. Inoltre:

- se R è elementarmente equivalente a R', allora $N(R)$ è elementarmente equivalente a $N(R')$.
- se R è ω-stabile (superstabile, stabile) allora $N(R)$ lo è.

Viceversa, se R è unitario, allora R è definibile in $(N(R), (1,0))$. Quindi:

se $N(R)$ è ω-stabile (superstabile, stabile) allora R lo è.

Quindi classificare gli anelli (nilpotenti di esponente 3) per stabilità equivale in un certo senso a classificare per stabilità tutti gli anelli unitari.

Per quanto riguarda il caso semisemplice (cioè $R/J(R)$), vale il seguente

Teorema 5.2

Se R è un anello semisemplice ω-stabile (superstabile, stabile), allora R è il prodotto diretto di un numero finito di anelli di matrici su corpi ω-stabili (superstabili, stabili).

Il problema si riduce allora alla classificazione dei corpi ω-stabili (superstabili, stabili). Nel caso stabile il problema è ancora aperto (ho già notato che lo è anche per i campi). Mentre:

Teorema 5.3 (Cherlin [C])

Un corpo superstabile è commutativo.

Combinando allora con il teorema 2.1 abbiamo

Teorema 5.4

Sia R un anello semisemplice. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. R è superstabile
2. R è ω-stabile
3. R è classificabile
4. R è il prodotto diretto di un numero finito di anelli di matrici su campi finiti o algebricamente chiusi.

Per quanto riguarda il problema generale di classificazione per gli anelli il seguente argomento, dovuto a Mal'cev [Ma], mostra come risolvere il problema per i gruppi (nilpotenti di classe 2) implichi risolvere il problema per gli anelli.

Sia R un anello, G(R) è il gruppo moltiplicativo delle matrici della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c \in R.$$

Per semplicità rappresentiamo una tale matrice con la terna ordinata (a,b,c) e il prodotto è allora dafinito da:

$$(a,b,c)\ (a',b',c') = (a+a',\ b+b',\ c+c'+ba').$$

G(R) è nilpotente di classe 2. Inoltre:

- se R è elementarmente equivalente a R' allora G(R) è elementarmente equivalente a G(R')
- se R è ω-stabile (superstabile, stabile) allora G(R) lo é.

Se R è unitario allora R è definibile in G(R) da cui:

se G(R) è ω-stabile (superstabile, stabile) allora R lo è.

6. Possibili critiche ed approcci alternativi.

Ho finora sostenuto che Shelah ha risolto il problema della classificazione (descritto in [Mr]) per teorie contabili del I ordine. Shelah stesso formula questo come principale teorema (cfr. [Sh] 2.1). In realtà il problema di assegnazione di invarianti non è completamente risolto . Dal teorema di rappresentazione (cfr. [Mr] Teor. 4.7) se T è tale che $I(\lambda,T) < 2^{\lambda}$ per qualche $\lambda > \aleph_0$ è possibile associare ad ogni modello M di T un albero per sottomodelli contabili, su cui M è primo. Non è stato dimostrato da Shelah che tali rappresentazioni di M sono isomorfe, ma soltanto "quasi isomorfe". E' a questo punto che l'imprecisione sulla teoria di Shelah compare. Questo è generalmente trascurato poiché, almeno per teorie ω-stabili, è ancora possibile determinare la funzione spettro della teoria (cfr. [S]).

Buechler [Bu] ha provato un teorema di struttura nel caso particolare di teorie $\aleph_0$-categoriche, ω-stabili, usando un differente assegnamento di invarianti. Il problema in generale non è però ancora sistemato.

Analogamente, abbiamo più volte osservato che una struttura ordinata è instabile e quindi non ha un teorema di struttura nel senso di Shelah. Ma, nonostante ciò, esistono teorie di questo tipo con buone proprietà di teoria dei modelli (per esempio esistenza e unicità del modello primo).

Pillay e Steinhorn [PS] hanno sviluppato una teoria generale nel caso che la struttura con un ordine lineare soddisfi una condizione analoga a quella che le teorie fortemente minimali soddisfano nel caso della relazione di uguaglianza. Da qui in avanti si assume di riferirsi ad un linguaggio contenente un simbolo relazionale binario $<$, che viene interpretato come un ordine lineare in tutte le strutture considerate.

Un <u>intervallo aperto</u> I in una tale struttura M è un sottoinsieme di M definibile della forma $I=\{c \in M : M \models a<c<b\}$ per qualche $a,b \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$, con $a<b$.

Similmente si possono definire intervalli in M, chiusi, semi-aperti, semi-chiusi ecc. Chiamerò intervallo un intervallo di uno dei tipi citati.

<u>Definizione</u> 6.1

Una struttura linearmente ordinata M è detta o-<u>minimale</u> se ogni insieme definibile di M è unione finita di intervalli in M.

Una teoria T è detta <u>fortemente</u> o-<u>minimale</u> se ogni modello di T è o-minimale.

Le seguenti strutture sono esempi di strutture o-minimali:

(i) ordine lineare discreto con o senza estremi nel linguaggio $L=\{<\}$;

(ii) ordine lineare denso con o senza estremi nel linguaggio $L=\{<\}$;

(iii) gruppo abeliano divisibile nel linguaggio $L=\{+,0,<\}$;

(IV) campo reale chiuso nel linguaggio $L=\{+,\cdot,0,1,c\}$;

viceversa vale il

<u>Teorema</u> 6.3 (Pillay-Steinhorn [PS])

(1) Un gruppo ordinato o-minimale è un gruppo ordinato abeliano divisibile.

(2) Un anello ordinato o-minimale è un campo reale chiuso.

<u>Teorema</u> 6.4 (Knight-Pillay-Steinhorn [KPS])

<u>Se T ha un modello o-minimale, allora T è fortemente o-minimale.</u>

Le teorie fortemente o-minimali hanno "buone" proprietà di teoria dei modelli in quanto:

Teorema 6.5 (Pillay-Steinhorn [PS])

Sia $A \subseteq M$, M modello di T, fortemente o-minimale. Esiste N modello di T, $A \subseteq N$, N primo su A e N unico a meno di isomorfismi che lasciano fisso A.

E' interessante anche citare il seguente teorema sui modelli contabili di una teoria o-minimale che risolve la congettura di Vaught in questo caso particolare.

Teorema 6.6 (Mayer [My])

Sia T fortemente o-minimale. Se T ha meno di $2^{\aleph_0}$ modelli contabili, allora esistono interi non negativi q,r tale che T ha $6^q 3^r$ modelli contabili.

BIBLIOGRAFIA

[B] W. BAUR, "Elimination of quantifiers for modules". Israel J. Math. 25 (1976) 64-70.

[Bu] S. BUECHLER, "Invariants for ω-categorical ω-stable theories" (preprint).

[C] G. CHERLIN, "Superstable division rings". Logic Colloquium 77. Noth Holland (1978) 99-111.

[CS] G. CHERLIN-S. SHELAH, "Superstable fields and groups". Ann. Math. Logic 18 (1980).

[EF] P. EKLOF-E. FISHER , "The elementary theory of abelian groups". Ann. Math. Logic 4 (1972) 115-171.

[F] E. FISHER , "Power of saturated modules" J. Symb. Logic 37 (1972) 777.

[G] S. GARAVAGLIA, "Decomposition of totally trascendental modules". J. Symb. Logic 45 (1980) 155-164.

[KPS] J. KNIGHT-A. PILLAY-C. STEINHORN "Definable sets in ordered structures II" (Preprint).

[M1] A. MACINTYRE, "On ω_1-categorical theories of abelian groups". Fund. Math. 70 (1971) 253-270.

[M2] A. MACINTYRE, "On ω_1-categorical theories of fields". Fund. Math. 71 (1971) 1-25.

[Ma] A. MAL'CEV, "A corrispondence between rings and fields" in "The metamathematics of algebraic systems". North Holland (1971) 124-137.

[Mr] A. MARCJA, "Metodi di teoria dei modelli per un teorema generale di struttura in algebra". Atti del convegno G.N.S.A.G.A. (In pubblicazione)

[My] L. MAYER, "Vaught's conjecture for o-minimal theories". PHD dissertation. Yale University (1985).

[Me] A. MEKLER, "Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent". J. Symb. Logic 46 (1981) 781-788.

[Mo] L. MONK, "Elementary recursive decision procedures". PHD dissertation. Berkeley (1975).

[PS] A. PILLAY-C. STEINHORN, "Definable sets in ordered structures". (Preprint).

[S] J. SAFFE, "The number of uncountable models of ω-stable theories". Ann. pure app. Logic 24 (1983) 231-261.

[Sh] S. SHELAH, "Classification of first order theories which have a structure theorem". Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 227-232.

[T1] C. TOFFALORI, "Teoria della classificazione e algebra 1. Una introduzione". Quaderni Ist. Mat. U. Dini n°4 (1985-86).

[T2] C. TOFFALORI, "Teoria della classificazione e algebra 2. Gruppi ω-stabili e gruppi algebrici". Quaderni Ist. Mat. U. Dini n° 8 (1985/86).

[Z] M. ZIEGLER, "Model theory of modules". Ann. pure app. Logic <u>20</u> (1984) 149-213.