Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU MOIRÉ SUGGÉRÉE PAR L'ANALYSE NON STANDARD

GEORGE REEB
Strasbourg

Une réunion, placée sous le signe de la logique et du calcul infinitésimal et localisée à PADOUE, est aussitôt dominée par le souvenir de G. VERONESE ; le buste de l'illustre géomètre, dans la salle choisie pour l'ouverture du colloque, ce jour-là inspirait les participants.

Ma contribution voudrait se placer sous le patronage des leçons de géométrie où le maître montrait l'adaptation des infinitésimaux à la description de l'univers (même physique) ; mais forcément plus modeste, ma communication traitera du phénomène physique du moiré, exploité par micro-ordinateur. Ce programme est fortement motivé par les acquis modernes de la mathématique non standard, particulièrement dans la forme dont la théorie I.S.T. de E. NELSON traite des infinitésimaux. Mon projet ambitionne rien moins qu'une approche, parmi d'autres, d'un traitement par "l'image" de notions mathématiques telles la dérivée. De telles expérimentations sont de mode, peut-être que celle-ci aura quelque attrait.

J'exposerai successivement : un point fondamental d'analyse non standard ; le moiré "machine à dériver" ; programmation d'un moiré ; et expérimentations.

1. Un lemme fondamental de mathématique non standard.

Nous prenons comme base l'article [1], en effet le langage de I.S.T. est parfaitement adapté à notre objectif. Voici le lemme annoncé, extrait de [1].

LEMME : Il existe un ensemble fini F tel que tout objet standard a vérifie $a \in F$.

Ce lemme est bien sûr fondamental, aussi toute tentative de le commenter se transforme sur le champ en un cours de I.S.T., mais nous essayons de dégager quelques enseignements du lemme, utiles à notre projet.

α) A l'exception du vocable "standard", indispensable au discours I.S.T. le vocabulaire utilisé dans l'énoncé du lemme est celui de la mathématique classique. En particulier l'adjectif "fini" a exactement le sens que lui confère la mathématique classique.

β) Une conséquence immédiate du lemme assure que tout ensemble infini, possède des éléments non standard.

γ) Autre conséquence : dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les individus couramment appelés 0,1,2,3... sont enfermés dans un ensemble fini A (que l'on peut choisir ainsi : $A = F \cap \mathbb{N}$) ; en effet 0,1,2,... sont standard.

δ) On peut évidemment souligner l'aspect purement existentiel de F dont parle le lemme, et éviter de prendre au pied de la lettre les enseignements du lemme.

ε) On peut également considérer que des théorèmes de permanence (un exemple figure en λ) donnent une possibilité de confronter, dans des cas favorables, des enseignements du lemme à l'expérimentation sur les entiers.

λ) Voici un exemple d'une "permanence". Soit $P(n)$ une propriété de la mathématique classique vraie pour tout n grand (i.e. non standard), alors P est vraie pour quelque n standard), (P pourra par exemple être la propriété suivante : pour n grand les solutions fournies par la méthode de PEANO, pour l'équation $y' = \cos y + \sin x$ et les conditions initiales $(0,0)$, sur l'intervalle $[0\ 1]$ diffèrent de la solution vraie ainsi précisée, de moins de 0,0001).

μ) Encouragé par ces remarques on accueillera volontiers une suggestion de HARTHONG [2] : faire élection dans $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers signés) d'un entier ω grand et >0 . Définir ensuite de façon évidente les <u>limités</u> ($a \in \mathbb{Z}$ est limité ssi $|a| < u\omega$ pour quelque u standard), les <u>infinitésimaux</u> puis les <u>halos</u>. On aura ainsi à disposition dans $\mathbb{Z}$ tous les éléments d'une analyse réelle.

ν) Nous pouvons en venir à notre objectif : l'idée de J. HARTHONG nous suggère de <u>coder</u> une fonction raisonnable [S - continue pour fixer les idées] sur $[0\ 1]$ ainsi : la variable i parcourt les entiers de 0 à ω (ω rappelons-le est l'étalon unité) ; les valeurs de la fonction sont codées en inscrivant en face de $i = 0$ une valeur initiale y_o ($y_o \in \mathbb{Z}$ et y_o <u>limité</u>) et en face de $i > 0$ un limité a_i . Il est sous-entendu que la valeur de la fonction en i est l'entier : $y_o + \sum_{r \leq i} a_r$. Une fonction admet évidemment plusieurs codes, générant des valeurs proches. On voit comment définir la somme, le produit de deux codes, la primitive d'un code, etc...

σ) Si maintenant on nous autorise à assimiler les 8000 octets mémoires de mon MO-5 que j'entends utiliser, à ω - cases de code, les entiers de 1 à moins de 100, à des limités, on verra que le microprocesseur est un excellent instrument pour coder concrètement des fonctions. Il sera aisé d'écrire un programme pour fabriquer à partir d'un code, le code de la primitive. Puis d'intégrer des équations différentielles.

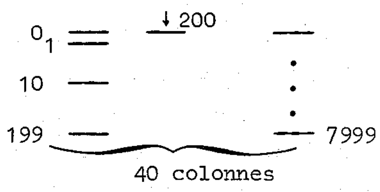
τ) Ainsi partant du code d'une fonction constante : [10000,0,0 ...0 pour fixer les idées], on obtient après 4 intégrations successives un polynôme de degré 4. Les programmes en langage machine permettent de réaliser ces opérations en l'espace d'une seconde. Pour la petite histoire, il apparaîtra que pour l'application au moiré les codes, à part y_o , supposent $a_i = 0$ ou 1 .

ω) Inutile d'ajouter maintenant que les théorèmes de permanence évoqués plus haut permettent de donner une assise théorique solide (si cela était vraiment utile) aux manipulations ainsi faites sur ordinateur.

2. Le moiré machine à dériver.

Nous décrirons ici le phénomène très connu du moiré, sous une forme très simplifiée permettant son implantation sur notre matériel (THOMSON MO5). Rappelons d'abord que le constructeur, prévoyant pour la gestion de l'écran une gestion "encre" et une gestion "fond" a providentiellement prévu, sur l'écran, la superposition, quasi matérielle, de deux films supportant chacun un réseau.

Décrivons maintenant un réseau : pour cela il nous faut rappeler un mot sur l'écran. L'écran est subdivisé en 8000 octets de 8 points chacun et disposés ainsi avec leur numérotation :



Rappelons que chaque trait peut être allumé en "encre" ou "fond".

Nous appellerons <u>réseau</u> le ruban constitué par les 8000 segments, supposés rangés dans l'ordre des numéros

σ 7999
||| ... ||| .

Un <u>réseau de moiré</u> est un réseau dont les segments sont ou opaques ou transparents. Un réseau de moiré peut donc être identifié à un code de fonction, code formé de 0 et de 1 uniquement. Nous confondrons dans notre discours le réseau de moiré et la fonction (monotone) dont il est le code, on dira aussi : réseau de code f .

Un moiré (de translation) résulte de la superposition de deux réseaux identiques, dont l'un est décalé par rapport à l'autre d'une translation d'amplitude $\theta(\theta \in \mathbb{Z})$. Il est expressément entendu que la superposition des réseaux obéit à la règle optique : transparent sur transparent est transparent mais un trait opaque rend opaque tout trait superposé.

Le phénomène de moiré consiste à observer des motifs macroscopiques engendrés par la superposition des motifs microscopiques des réseaux. Il est clair pour des raisons de symétrie, que ces motifs macroscopiques sont des segments de rubans plus ou moins sombres : ce sont les <u>franges</u> de moiré. En un mot, il s'agit ici de moiré unidimensionnel.

La théorie du moiré (théorie particulièrement justiciable de la géométrie non standard, ainsi que le seul usage des mots micro et macro en témoignent) lie la structure des franges aux propriétés de la fonction f qui définit le réseau.

Le théorème suivant montre en quoi le moiré est une "machine à dériver".

THEOREME : Si la fonction directrice du réseau est de classe C_1 les franges du moiré de translation sont les bandes de niveau de la dérivée de f .

Ainsi lorsque le choix de f porte sur un polynôme de degré 2 les franges de niveau sont d'égale longueur.

D'autres lois, lient la longueur des franges à l'amplitude de la translation.

3. Implantation du moiré sur ordinateur.

Nous avons déjà montré qu'au moyen du code, un réseau théorique associé à la fonction f peut être implanté dans la mémoire. Il est également clair qu'une fonction connue par des mesures expérimentales serrées peut être tout aussi facilement implantée. Un programme simple (mais en langage machine pour la célérité) porte en "encre" ou "fond" le bloc mémoire du code à l'écran, et ceci en une fraction de seconde. Jouant sur un décalage d'adresses (l'ordinateur est conçu pour cela) on réalise la translation θ . La loi optique de la superposition est réalisée providentiellement par le constructeur qui avait prévu semble-t-il cette utilisation de son matériel.

Le lecteur un peu attentif observera que travaillant en nombres entiers, les épaisseurs des traits de notre réseau, sont des multiples entiers (1,2,3 ou 4 ; rarement 5 ou plus) du trait élémentaire de l'écran (1mm) ; appelons cela l'effet d'arrondi : Les moirés de la nature ne comportent pas cet effet ; nous pourrions atténuer cet effet, mais finalement nous avons observé que cet effet est plus utile que nuisible et du coup nous l'avons plutôt amplifié qu'atténué.

4) Expérimentations.

Arrivé à ce stade de mon exposé je pourrai me simplifier la vie en proposant à la vente et pas cher le logiciel ; ceci pour de multiples raisons ne se fera pas, mais je promets volontiers de copier ma cassette à l'usage de qui m'en fera la demande, mais pour sûr il faut un MO5 pour s'en servir. Le listing est bref : peut-être 150 octets et un "écran" de basique ; mais pour le publier il vaut mieux le rendre "portable". Ce sera pour plus tard.

Mon programme, on l'aura deviné, consiste donc dans l'étude expérimentale de l'opération de dérivation et par contraste des fonctions (théoriques ou d'origine expérimentale)non dérivables. Les activités suivantes en résultent :

a) faire entrer en mémoire des codes de fonctions variées (polynômes, exponentielles, aléatoires ...) et contempler (à raison d'une translation de (mm/seconde) les franges (ou leur absence) et expliquer ce qui se passe à l'écran.

b) Faire un effort approfondi sur le cas où la fonction directrice est mal dérivable. Ici l'effet d'arrondi est bénéfique, il remplace, en la perturbant raisonnablement, une fonction régulière par une fonction linéaire par morceaux.

c) Dégager des règles expérimentales pour analyser et classer des fonctions d'origine expérimentale.

[1] E. NELSON,Internal Set Theory. Bull. Am. Math. Soc. (1977).
[2] J. HARTHONG, Le Moiré, Adv. Appl. Math. 2(1981) 24-75.