

Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5
aprile 1986.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

DOTTRINE CON COMPRESIONE E LOGICHE LIBERE

CLAUDIO BERTA, GIANCARLO MELONI
Milano

Un modo usuale di procedere nei ragionamenti matematici consiste nel passare da una relazione funzionale parziale alla funzione da essa definita e, in questo lavoro, analizzeremo dal punto di vista delle dottrine tale procedimento che, nonostante la sua "naturalità", non può in generale essere rappresentato "immediatamente" nelle usuali presentazioni delle teorie matematiche (nella logica formale).

Il relativo disinteresse dei logici per tale questione è certamente motivato in grande misura dalla giusta osservazione, verificabile in modo preciso, che ogni ragionamento in cui si utilizzano le funzioni parziali può essere effettuato usando solamente le relazioni che le definiscono.

Ma gli studi di logica non si limitano al problema della potenza deduttiva delle teorie ed alla connessa questione della possibile traducibilità, in una teoria formale data, di determinati procedimenti dimostrativi "informali" non rappresentabili, in essa, immediatamente. Un problema importante è anche quello di sviluppare sistemi formali dotati di buone proprietà di "naturalità", ossia in grado di esprimere direttamente, non attraverso traduzioni estrinseche, gli usuali ragionamenti matematici.

Ciò ci sembra particolarmente interessante in questi anni in quanto la logica, concepita nel senso ristretto ma importante di "verifica della correttezza delle argomentazioni", sta acquistando una centralità specifica nella reale pratica matematica. Infatti i topoi e le bicategorie pongono oggi al matematico il problema di capire "immediatamente" il livello di logica rispetto al quale le sue argomentazioni informali risultano valide. E per questo scopo ci sembra che sia indispensabile, come passo intermedio, un'analisi logica del ragionamento matematico nella quale i procedimenti usuali trovino rappresentazioni dirette e naturali; tale analisi dovrà inoltre essere particolarmente attenta

alla logica degli insiemi variabili con continuita' e dei ragionamenti costruttivi, alla modalita' locale e alla logica lineare delle situazioni additive o logica generalizzata secondo Lawvere.

D'altra parte dall'indagine che segue emergono punti di vista e soluzioni, che ci sembrano nuovi, nel campo della teoria delle descrizioni (parziali), delle logiche libere e delle logiche modali. Tali soluzioni hanno tra l'altro il pregio della mancanza di artificiosita', a differenza di quanto avviene con una certa frequenza in questi campi. Ci pare che cio' dimostri che nella ricerca logica vi possono essere (e forse sono da ricercare) rapporti significativi tra "logica matematica" e cosiddetta "logica filosofica".

1. Dal punto di vista delle teorie in senso invariante, viste come particolari categorie, il problema che abbiamo posto risulta automaticamente risolto. Trattando la questione al livello minimo di logica in cui essa ha senso, cioe' nel contesto delle teorie essenzialmente algebriche (frammento delle teorie del primo ordine con identita' e a piu' sorte, contenente congiunzioni finite e quantificazioni esistenziali in condizioni di unicita'), si ha che una teoria non e' altro che una categoria cartesiana, ossia con limiti finiti. In tali categorie infatti c'e' una perfetta equivalenza tra "funzioni parziali" da X a Y , ossia diagrammi del tipo

$$X \longleftarrow S \longrightarrow Y,$$

e relazioni funzionali parziali da X a Y , ossia diagrammi del tipo

$$R \longrightarrow X \times Y$$

per i quali si ha che $R(x,y) \wedge R(x,y') \vdash y=y'$.

L'obiettivo che ci proponiamo in questo lavoro e' la trattazione nel contesto delle dottrine del rapporto tra relazioni funzionali parziali e funzioni; in altre parole, ci occuperemo della caratterizzazione intrinseca mediante "operazioni dottrinali" delle dottrine dei sottoggetti di una categoria cartesiana. Tale caratterizzazione fornisce tra l'altro le idee guida per presentare formalmente le teorie in cui e' possibile associare ad ogni relazione (dimostrabilmente) funzionale parziale il termine da essa definito.

Iniziamo introducendo il concetto di dottrina essenzialmente algebrica; tale concetto non e' altro che l'algebrizzazione diretta delle usuali presentazioni delle teorie essenzialmente algebriche.

Una dottrina e' un funtore controvariante

$$\mathcal{A} : \mathbb{I} \longrightarrow (\mathbb{I}\mathbb{R})^{\circ}$$

da una categoria \mathbb{I} con prodotti finiti alla categoria $\mathbb{I}\mathbb{R}$ degli inf-reticoli, ossia degli insiemi ordinati dotati di estremi inferiori finiti. Gli oggetti e le frecce di \mathbb{I} sono detti rispettivamente tipi e termini; per ogni tipo X , $\mathcal{A}(X)$ e' la collezione degli attributi di quel tipo e la relazione d'ordine di $\mathcal{A}(X)$, che sara' denotata con \vdash_X o semplicemente con \vdash , e' la relazione sintattica di dimostrabilita' della teoria ristretta agli attributi di tipo X . Per ogni termine $f : X \longrightarrow Y$, $f' := \mathcal{A}(f)$ e' l'operazione di sostituzione o immagine inversa lungo f .

Una dottrina e' essenzialmente algebrica se

- i) per ogni tipo X e' dato un attributo $(=)_X \in \mathcal{A}(X \times X)$ che soddisfa le proprieta' dell'uguaglianza, compresa quella delle coppie (si veda [2]);
- ii) per ogni attributo funzionale parziale F da X a Y , ossia per ogni $F \in \mathcal{A}(X \times Y)$ tale che

$$\langle c_1, c_2 \rangle \cdot F \wedge \langle c_1, c_3 \rangle \cdot F \vdash_{X \times Y \times Y} \langle c_2, c_3 \rangle \cdot (=)_Y,$$

e' dato un attributo $\exists_{b_1}(F)$ di tipo X per il quale, comunque si assegni un $A \in \mathcal{A}(X)$,

$$\exists_{b_1}(F) \vdash_X A \quad \text{se e solo se} \quad F \vdash_{X \times Y} b_1 A$$

(indicheremo con $\mathcal{F}_p(X,Y)$ l'insieme degli attributi funzionali parziali da X a Y);

- iii) rispetto all'operazione di quantificazione introdotta in (ii) valgono la condizione di Beck, relativa alla sostituzione nelle formule quantificate, e la condizione di Frobenius o di eliminazione di \exists con ipotesi aggiuntive (si veda [2]).

Si noti che abbiamo usato (e useremo in seguito) le lettere c_i ($i=1,2,3$) per denotare le proiezioni dal prodotto cartesiano di una terna di tipi, e le lettere b_i ($i=1,2$) per il prodotto di una coppia di tipi.

La costruzione di Joyal della categoria associata ad una dottrina puo' essere effettuata gia' a questo livello: a partire da una dottrina essenzialmente algebrica \mathbb{D} si definisce la categoria $\mathbb{Y}(\mathbb{D})$, che risulta essere cartesiana, i cui oggetti sono gli attributi di \mathbb{D} , mentre le frecce da $A \in \mathcal{A}(X)$ a $B \in \mathcal{A}(Y)$ sono gli attributi $F \in \mathcal{F}_p(X,Y)$ tali che $A \vdash \exists_{b_1}(F)$ e $F \vdash b_2 A \wedge b_2 B$. Le frecce si compongono secondo l'abituale composizione di relazioni (si osservi che, nel caso di relazioni funzionali, il quantificatore

esistenziale che interviene nella composizione di relazioni e' applicato in condizioni di unicita'; inoltre si ha che $F = F'$ se e solo se $F \vdash F'$ e $F' \vdash F$.

D'altra parte ad ogni categoria cartesiana \underline{C} e' associata la dottrina $\delta(\underline{C})$ dei sottoggetti di \underline{C} .

Le costruzioni γ e δ sono funtoriali e tra la bicategoria delle categorie cartesiane e la bicategoria delle dottrine elementari esistenziali esistono gli stessi rapporti che vi sono nel caso delle categorie regolari e delle dottrine elementari esistenziali (si veda [1]) e che continuano a sussistere per i livelli logici "piu' ricchi". In particolare γ e' l'aggiunto a sinistra di δ e per ogni \underline{C} la componente \underline{C} -esima della cunita' dell'aggiunzione e' un'equivalenza tra $\gamma(\delta \underline{C})$ e \underline{C} . D'altra parte si ha che la componente \underline{D} -esima $\eta_{\underline{D}} : \underline{D} \rightarrow \delta(\gamma \underline{D})$ dell'unita' dell'aggiunzione e' un'equivalenza se e solo se \underline{D} e' isomorfa alla dottrina dei sottoggetti di una categoria cartesiana (che si puo' sempre assumere coincidente con \underline{T}): chiameremo cartesiane tali dottrine. Quindi il funtore γ ristretto alla bicategoria delle dottrine cartesiane e' un'equivalenza (nel senso bicategoriale del termine).

In [1] e' data una caratterizzazione delle dottrine dei sottoggetti di una categoria regolare che si basa essenzialmente sullo schema di comprensione di Lawvere [2]. Tale schema non dipende in realta' dal fatto che la dottrina sia dotata di quantificatori esistenziali e puo' quindi essere leggermente modificato in modo da operare nelle dottrine cartesiane. Infatti nel contesto della logica essenzialmente algebrica vale la seguente

PROPOSIZIONE. Per una dottrina \underline{D} , le condizioni

- \underline{D} e' cartesiana
- \underline{D} e' una dottrina algebrica con comprensione
- \underline{D} e' una dottrina con rappresentabilita' delle relazioni funzionali parziali

sono equivalenti.

Il significato del teorema e' parzialmente contenuto nelle definizioni che seguono.

Una dottrina algebrica con comprensione e' una dottrina \underline{D}

- i) dotata delle immagini dirette dei termini mono, viste come attributi del codominio, ossia tale che per ogni termine mono $m : W \rightarrow Y$ e' dato un attributo Im di tipo Y tale che per ogni $B \in \mathcal{Q}(Y)$,

$$\text{Im} \vdash_Y B \quad \text{se e solo se} \quad \vdash_W m' B$$

- ii) dotata per ogni tipo X e per ogni $A \in \mathcal{Q}(X)$, di un tipo $[A]$ e di un termine mono $m_A : [A] \rightarrow X$ (detti "la comprensione" di A) tale che $I(m_A) = A$

- iii) e per la quale, per ogni termine $f : X \rightarrow Y$ e per ogni monomorfismo $m : W \rightarrow Y$, da $\vdash f'(Im)$ segue che esiste un (unico) termine f' tale che $f = f' \cdot m$.

Queste condizioni implicano che per ogni tipo X la collezione dei sottoggetti di X e $\mathcal{Q}(X)$ sono isomorfi naturalmente, quindi in una dottrina algebrica con comprensione \underline{D} vale lo schema di comprensione di Lawvere (si veda [2]) modificato sostituendo $\exists_f(v_x) \vdash B$ con $\vdash f' B$; da cio' segue che la categoria \underline{T} dei tipi e' cartesiana e $\delta(\underline{T})$ e' isomorfa a \underline{D} , ossia \underline{D} e' una dottrina cartesiana.

Una dottrina con rappresentabilita' delle relazioni funzionali parziali e', invece, una dottrina essenzialmente algebrica nella quale

- j) per ogni $F \in \mathcal{F}_p(X, Y)$ sono assegnati un tipo DF e due termini

$$X \xleftarrow{dF} DF \xrightarrow{\gamma F} Y$$

tali che dF e' dimostrabilmente iniettivo e

$$\exists_{\langle c_2, c_3 \rangle} \langle \langle c_1 \cdot dF, c_2 \rangle (=)_X \wedge \langle c_1 \cdot \gamma F, c_3 \rangle (=)_Y \rangle = F$$

- jj) per ogni coppia di termini paralleli f e g dimostrabilmente uguali, ossia tali che $\vdash \langle f, g \rangle (=)$, si ha che $f = g$
- jjj) ogni termine $m : W \rightarrow Y$ dimostrabilmente iniettivo e tale che $\exists_{b_2} \langle \langle b_1 \cdot m, b_2 \rangle (=)_Y \rangle$ (cioe' ogni termine dimostrabilmente biiettivo) e' un isomorfismo.

Il fatto che una dottrina con rappresentabilita' delle relazioni funzionali parziali e' algebrica con comprensione segue dall'osservazione che, per ogni tipo X , $\mathcal{Q}(X) \cong \mathcal{F}_p(X, 1)$ e percio' usando (j) e' possibile fare la comprensione degli attributi (in quanto si verifica che i termini dimostrabilmente iniettivi sono esattamente i termini mono). Inoltre per dimostrare l'esistenza del termine f' della condizione (iii) si utilizzano l'attributo funzionale corrispondente e la condizione (j). Poiche' una dottrina cartesiana e' con rappresentabilita' delle relazioni funzionali parziali, il teorema risulta dimostrato.

La definizione di dottrina con rappresentabilita'

delle relazioni funzionali parziali si rivela utile in particolare rispetto al problema della presentazione delle teorie in quanto, ad esempio, in essa non si usa il concetto di termine mono.

Al posto di (jjj) si potrebbe richiedere la condizione che insieme a (j) garantisce, per ogni coppia di tipi X e Y , che l'insieme ordinato dei "termini parziali" da X a Y sia isomorfo a $\mathcal{F}_p(X, Y)$. Ma la versione data è interessante per due motivi. Innanzitutto ci sembra che sia soprattutto (j) la proprietà che interviene nelle usuali dimostrazioni matematiche, anche se questa ipotesi può essere valutata solo alla luce di una verifica pratica più dettagliata. Inoltre, ad una dottrina essenzialmente algebrica che soddisfa (j) - e che chiameremo dottrina con rappresentabilità debole delle relaz. funz. parz. - è associata in modo universale una dottrina cartesiana: dapprima si quozientano i termini identificando quelli dimostrabilmente uguali, quindi si esegue un calcolo delle frazioni rispetto alla collezione dei termini dimostrabilmente biiettivi (definendo opportunamente le nuove operazioni di immagine inversa).

L'unità η dell'aggiunzione $\gamma \dashv \delta$ rappresenta un modo universale per associare ad una dottr. essenz. alg. \underline{D} una dottrina cartesiana. Si ha inoltre che $\delta(\gamma \underline{D})$ è, rispetto al morfismo $\eta_{\underline{D}}$, un'estensione conservativa di \underline{D} , ossia se $A, A' \in \mathcal{Q}(X)$ e vale

$$\eta_{\underline{D}}(A) \vdash \eta_{\underline{D}}(A')$$

allora si ha già $A \vdash A'$. Poiché ogni morfismo $\eta_{\underline{D}}$ si fattorizza attraverso la costruzione universale (che esiste sempre) della dottrina \underline{D}' con rappresentabilità debole delle relaz. funz. parz. generata da \underline{D} , si ha che anche \underline{D}' è un'estensione conservativa di \underline{D} .

2. Ad ogni dottrina è associata una presentazione che è costituita da un tipo di similarità in cui le sorte, i simboli di funzione e i simboli di relazione sono rispettivamente i tipi, i termini e gli attributi della dottrina. Gli assiomi sono tutti i sequenti validi rispetto all'interpretazione canonica di tale linguaggio nella dottrina. Questo processo standard fornisce le idee per la definizione delle presentazioni sia delle teorie essenzialmente algebriche che delle teorie con rappresentabilità (eventualmente debole) delle relazioni funzionali parziali (con la possibilità di limitarsi ai rapporti tra descrizioni definite parziali e costanti parziali). Si noti che nel primo caso la definizione induttiva delle formule si intreccia con quella delle dimostrazioni; nel secondo, le definizioni induttive

delle formule e delle dimostrazioni si intrecciano anche con quelle delle sorte e dei simboli di funzione.

Nelle dottrine gli operatori logici binari possono essere applicati solo ad attributi dello stesso tipo, così come la relazione di dimostrabilità ha senso solo tra attributi dello stesso tipo, mentre quantificazione e sostituzione cambiano in genere il tipo degli attributi. Il calcolo logico, come per esempio ha evidenziato Lawvere [3], può prescindere da ciò solo a scapito della sua naturalezza e solo se si esclude a priori la possibilità che la teoria abbia modelli "vuoti", rinuncia certo non di poco conto rispetto all'esigenza, emersa dalla pratica matematica degli ultimi anni, di poter considerare modelli anche in categorie di insiemi variabili.

Il modo più semplice per presentare una sintassi che tenga conto di quanto si è detto, e quindi sia inclusiva, è quello di usare simboli di deduzione con supporto. Si vede subito allora che il calcolo logico non permette di ottenere $\vdash \exists x(x=x)$, in quanto in realtà la dimostrazione procede nel modo seguente

- 1) $\frac{}{X} x=x$ assioma
- 2) $x=x \frac{}{X} \exists x(x=x)$ introduzione di \exists (tenendo conto che antecedente e conseguente devono essere dello stesso tipo)
- 3) $\frac{}{X} \exists x(x=x)$ 1.2 - transitività di $\frac{}{X}$

e il supporto del sequente (3) indica che la formula dimostrata ha una variabile "sottintesa" di tipo X .

Se la sostituzione non commuta con alcuni operatori logici, il metodo dei sequenti con supporto non è sufficientemente "raffinato" per dirimere ogni ambiguità, in quanto diventa allora necessario sapere dove sono state sottintese delle variabili (e non solo quali sono le variabili sottintese). Per esempio, la deduzione

$$(*) \quad \exists x(\diamond A(x)) \vdash \diamond \exists x A(x)$$

viene considerata una legge logica che si ottiene dalle usuali regole del quantificatore esistenziale e dalla funtorialità di \diamond ($B \vdash C$ implica $\diamond B \vdash \diamond C$). In realtà, esaminando (*) "concettualmente" (ossia nel contesto delle dottrine), si vede che essa dipende dalla commutatività di \diamond con le variabili sottintese. Tale commutatività è a sua volta implicata da (*) ed equivale al fatto che ogni elemento di un mondo possibile

abbia almeno un corrispettivo in ogni mondo accessibile (e ci sono modelli interessanti, si pensi ai sottoprefasci generati, in cui cio' non e' vero).

Il concetto di dottrina con rappresentabilita' delle relazioni funzionali parziali e' utile anche per indagare alcuni problemi tipici delle logiche libere e della teoria delle descrizioni. Infatti l'insieme ordinato delle relazioni funzionali parziali dall'oggetto terminale ad un qualsiasi tipo X della dottrina e' (isomorfo a) l'insieme ordinato delle descrizioni definite parziali di tipo X , cioe' degli attributi $A \in \mathcal{Q}(X)$ tali che

$$A(x) \wedge A(x') \vdash x=x'.$$

Ma allora per la rappresentabilita' delle relaz. funz. parz. ad ogni descrizione definita parziale A di tipo X resta associato un termine parziale che (a meno di opportuni isomorfismi) si puo' identificare con

$$1 \xleftarrow{d_A} [\exists x A(x)] \xrightarrow{\gamma_A} X.$$

Tale termine parziale, avendo per dominio un sottoggetto dell'oggetto terminale, sara' chiamato "costante parziale". Inoltre, si ha che questi dati soddisfano la condizione

$$\vdash A(\neg x A(x)).$$

D'altra parte ad una costante parziale $1 \xleftarrow{c} S \xrightarrow{c} X$ corrisponde la proprieta' "essere uguale a c " che, vista come attributo di tipo X , indichiamo con U_c . Tale attributo non e' altro che la descrizione definita parziale associata alla relazione funzionale parziale (ossia al grafo) corrispondente al termine parziale c . Da un lato si ha allora che c coincide (a meno di isomorfismi) con

$$1 \xleftarrow{c} [\exists x U_c(x)] \xrightarrow{c} X,$$

dall'altro, se $A \in \mathcal{Q}(X)$ e' una descrizione definita parziale, $A(x) = U_{\neg x A(x)}(x)$.

Infine, dall'assioma

$$c=x \vdash_{S \times X} \exists x(c=x)$$

si ottiene, sostituendo nel sequente la costante c all'occorrenza libera di x (ossia facendo l'immagine inversa lungo $\langle 1_S, c \rangle$),

$$\vdash_S \exists x(c=x).$$

Quindi $\exists x(c=x)$ e' il vero (cioe' l'attributo massimo) di S , non in generale di 1 . Ossia l'attributo $\exists x(c=x)$ risulta si dimostrabile, ma in generale non sul tipo 1 bensì sul tipo S , cioe' sul dominio di definizione di c , che come sappiamo e' isomorfo a $[\exists x U_c(x)]$.

L'attributo $\exists x U_c(x)$, che in generale non e' dimostrabile, puo' essere letto come la proposizione " c esiste", infatti esso coincide con l'attributo $\exists x(c=x)$ visto su 1 (ossia quantificato esistenzialmente lungo $S \rightarrow 1$).

Rispetto ad un modello della teoria negli insiemi, o una costante parziale non denota nulla (ossia si interpreta in una funzione di dominio vuoto), oppure denota esattamente un individuo; nel caso di un modello negli insiemi variabili, invece, la situazione e' piu' complessa e interessante perche' una costante parziale puo' avere un riferimento a certi stadi di variazione (o mondi possibili) ma non ad altri.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.Berta-G.C.Meloni, Dottrine elementari-esistenziali regolari, in "Atti degli incontri di logica matematica", Siena 1982, 81-85.
- [2] F.W.Lawvere, Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor, in "Applications of Categorical Algebra", Proc. of Symp. in Pure Math., XVII (1970), 1-14.
- [3] F.W.Lawvere, Introduction to Part I, in "Model theory and topoi", LNM 445, Springer (1975), 3-14.