Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ω – SODDISFACIBILITÀ E TEOREMI DI INTERPOLAZIONE

RUGGERO FERRO
Padova

Summary

Malitz proved that the interpolation theorem does not hold in infinitary logics $L_{\alpha\beta}$ if either $\alpha>\omega_1$ or $\beta>\omega$. Changing the notion of satisfiability it is possible to extend Craig's interpolation theorem and even Maehara and Takeuti's interpolation theorem to such infinitary logics in ways which are more or less complete.

The changes of the notion of satisfiability follow Karp's proposal on how to understand the quantification of an infinite set of variables. She asked that the values assigned to the set of quantified variables should stay within an element of a denumerable ascending chain of subsets of the universe which covers the universe.

Combining this notion of satisfiability with the technique of the consistency properties some problems arise on the interpretation of the individual constants.

In this paper various solutions to such problem are considered and evaluated for the purpose of extending interpolation theorems.

Poiche' ci interesseremo di rafforzamenti del teorema di interpolazione di Craig sia in logiche del secondo ordine positive che in logiche infinitarie, sara' opportuno anzitutto richiamarlo.

Teorema di interpolazione di Craig. Siano F e G enunciati del linguaggio del primo ordine. Se $F \to G$ e' valida, allora c'e' una formula del primo ordine Z i cui simboli non logici, ed in particolare i predicati, occorrono sia in F che in G tale che $F \to Z$ e $Z \to G$ sono valide.

Poiche' nel teorema si parla di occorrenze di predicati, e' naturale riformularlo al secondo ordine sostituendo alle costanti sia predicative che individuali nuove variabili in corrispondenza biunivoca e preservando l'arieta', le variabili predicative saranno quantificate solo universalmente, cioe' ci porremo in un linguaggio che viene abitualmente designato come L^{2+} senza costanti. Il teorema si traduce in questo linguaggio come segue.

In F e in G non occorrono variabili predicative quantificate.

Siano $R_1,\dots,R_m$ variabili predicative in F non in G e $S_1,\dots,S_n$ variabili predicative in G non in F, $x_1,\dots,x_p$ altre variabili predicative che occorrono sia in F che in G o variabili individuali libere. La validita' di $F \to G$ equivale alla validita' di $\forall x_r,\dots,\forall x_p(\exists R_1,\dots,\exists R_m F \to \forall S_1,\dots,\forall S_n G)$, e la validita' di $F \to Z$ e di $Z \to G$ equivale alla validita' di $\forall x_1,\dots,\forall x_p((\exists R_1,\dots,\exists R_m F \to Z) \& (Z \to \forall S_1,\dots,\forall S_n G))$, e in Z dovranno occorrere libere solo variabili occorrenti libere sia in F che in G e nessuna quantificazione di variabili predicative.

In L^{2+} Chang ha rinforzato il teorema di interpolazione di Craig permettendo che la quantificazione in fronte sulle variabili del

primo ordine sia arbitraria, e precisamente.

Teorema di interpolazione di Chang. Q_i, $i=1,\dots,p$, sia $\forall$ o $\exists$ se la variabile che segue e' individuale, sia invece $\forall$ se la variabile che segue e' predicativa.

Se $\models Q_1 x_1,\dots,Q_p x_p(\exists R_1,\dots,\exists R_m F \to \forall S_1,\dots,\forall S_n G)$ allora c' e' una formula Z del primo ordine, cioe' senza quantificazione di variabili predicative, le cui variabili libere occorrono sia in F che in G tale che

$\models Q_1 x_1,\dots,Q_p x_p((\exists R_1,\dots,\exists R_m F \to Z) \& (Z \to \forall S_1,\dots,\forall S_n G))$.[1]

Maehara e Takeuti hanno ulteriormente rinforzato il risultato di Chang generalizzando la formula valida di partenza entro la quale occorre positivamente la sottoformula $\forall S_1,\dots,\forall S_n G$.

Teorema di interpolazione di Maehara e Takeuti. Sia S un enunciato valido di L^{2+} in cui tutte le occorrenze di varianti di G(A) sono positive, A un insieme di variabili che non occorrono in S. Allora c'e' una formula C del primo ordine (chiamata interpolante) le cui sole variabili libere sono in A tale che $\models C(A) \to G(A)$ e $\models S'$ dove S' e' l'enunciato ottenuto da S sostituendo ogni variante G(A/f) di G(A) con la corrispondente variante C(A/f) di C(A). (Qui f e' una funzione da A nelle variabili che preserva i posti, e la scrittura G(A/f) indica la formula ottenuta dalla formula G(A) sostituendo ad ogni variabile di A occorrente in G(A) la corrispondente variabile attraverso f).[8]

Lopez-Escobar [6] ha aperto una nuova via di sviluppo mostrando che il teorema di Craig vale anche per le logiche infinitarie $L_{\omega_1\omega}$.

Maehara e Takeuti hanno mostrato che anche il loro teorema di interpolazione si estende alla logica $L^{2+}_{\omega_1\omega}$.

Per le logiche infinitarie vale un teorema limitativo molto generale di Malitz che afferma che se $\alpha>\omega_1$ oppure $\beta>\omega$ allora non vale il teorema di interpolazione per le logiche $L_{\alpha\beta}$.[9]

La Karp [7] ha aggirato il limite posto da Malitz cambiando la nozione di soddisfacibilita' (e di validita', di conseguenza) e sostituendola con la nozione di ω-soddisfacibilita', per le logiche infinitarie $L_{\kappa\kappa}$ dove κ e' un cardinale limite forte di cofinalita' ω. Questa puo' essere introdotta come segue.

Al posto delle strutture, consideriamo le ω-catene di strutture $\mathfrak{A}=\langle\mathfrak{A}_n:n\in\omega\rangle$ dove $\mathfrak{A}_n\subseteq\mathfrak{A}_{n+1}$. Una attribuzione limitata $\bar{a}$ di valori a un insieme di variabili e' una funzione che manda le variabili individuali dell'insieme in A_n, l'universo dell'n-esima struttura dell'ω-catena, per qualche n, e le variabili predicative p-arie in insiemi di p-tuple di elementi di $\cup\langle A_n:n\in\omega\rangle$. Una formula φ di $L_{\kappa\kappa}$ ($L^{2+}_{\kappa\kappa}$) e' ω-soddisfatta dalla ω-catena di strutture $\mathfrak{A}$ e dalla attribuzione limitata $\bar{a}$ alle sue varabili libere, $\mathfrak{A},\bar{a}\models^{\omega}\varphi$, se vale uno dei seguenti casi:

1) se φ e' $P_i(x_1,\dots,x_p)$ allora $\langle\bar{a}(x_1),\dots,\bar{a}(x_p)\rangle\in R_i$;

2) se φ e' $\neg\psi$ allora $\mathfrak{A},\bar{a}\not\models^{\omega}\psi$;

3) se φ e' $\bigwedge\Phi$ allora per ogni $\psi\in\Phi$ $\mathfrak{A},\bar{a}\models^{\omega}\psi$;

4) se φ e' $\forall V\psi$ allora per ogni attribuzione limitata $\bar{b}$ a V si ha $\mathfrak{A},\bar{a}\cup\bar{b}\models^{\omega}\psi$;

5) se φ e' $x_1=x_2$ allora $\bar{a}(x_1)$ e' $\bar{a}(x_2)$.

Osserviamo subito che se un enunciato e' soddisfacibile allora e' anche ω-soddisfacibile.

Diremo che una formula F e' valida, e scriveremo $\models^{\omega}$, se e' ω-soddisfatta in ogni ω-catena di strutture con una qualsiasi attribuzione limitata alle sue variabili libere.

Teorema di interpolazione della Karp.

Se $\models^{\omega}F_1\rightarrow F_2$ allora c'e' una formula Z i cui simboli extralogici occorrono sia in F_1 che in F_2 tale che $\models(F_1\rightarrow Z)\&(Z\rightarrow F_2)$.

Si noti che il teorema della Karp richiede l' ω-validita' nell'ipotesi, ma nella conclusione ottiene solo la validita'. Tale limite e' stato superato dalla Cunningham [2] che ha dimostrato il teorema di interpolazione della Karp ma con l'ω-validita' anche nella conclusione. Anche se la nozione di ω-validita' della Cunningham differisce leggermente da quella della Karp in linguaggi con costanti, cio' non incide sul risultato finale in cui si puo' supporre che non ci siano costanti.

Tempo fa dimostrai che anche il teorema di interpolazione di Maehara e Takeuti puo' essere esteso ai linguaggi $L^{2+}_{\kappa\kappa}$ nella forma debole alla Karp, cioe' supponendo che $\models^{\omega}S$ ed ottenendo che per l'interpolante si abbia $\models C(A)\rightarrow G(A)$ e $\models S'$.[3]

Recentemente [5] sono riuscito ad ottenere anche il rafforzamento di quest'ultimo risultato in modo che anche nella sua conclusione per l'interpolante si abbia che $\models^{\omega}C(A)\rightarrow G(A)$ e $\models^{\omega}S'$, in piu' qui l'ω-validita' va intesa nel senso della Karp.

Nella dimostrazione dei teoremi della Karp, della Cunningham e dei miei si fa ricorso alla tecnica delle proprieta' di consistenza, e queste richiedono l'aggiunta di insiemi di testimoni. Le difficolta' nascono proprio su come si debbano interpretare gli insiemi di costanti individuali in un'ω-catena di strutture, anche se poi alla fine cio' e' irrilevante nella formulazione dei teoremi dove si parla di enunciati in un linguaggio senza costanti individuali.

La Karp voleva considerare le costanti esattamente alla stessa stregua delle variabili libere. Potremmo precisare questa posizione definendo la nozione di ω-catena di strutture per un linguaggio con costanti individuali come segue.

Se $L_{\kappa\kappa}(C)$ e' un linguaggio in cui C e' l'insieme di tutte e sole le costanti individuali, allora una ω-catena di strutture per questo linguaggio si ottiene da una ω-catena di strutture, diciamo $\mathfrak{A}$, per $L_{\kappa\kappa}$ aggiungendo una funzione da C in A_n, l'universo della n-esima struttura di $\mathfrak{A}$, per un fissato $n\epsilon\omega$.

Al contrario la Cunningham era molto piu' liberale nell'interpretazione delle costanti. Con lei potremmo dire che una ω-catena di strutture per il linguaggio $L_{\kappa\kappa}(C)$ si ottiene da $\mathfrak{A}$ per $L_{\kappa\kappa}$ aggiungendo una funzione da C in $\cup\{A_n : n\epsilon\omega\}$.

Chiameremo Karp soddisfacibilita' e Cunningham soddisfacibilita' le rispettive nozioni di soddisfacibilita' che seguono dalle definizioni ora date.

Vorrei far notare subito alcune difficolta' che nascono con queste nozioni.

L'insieme di formule $\{\exists\bar{v}_i\varphi_i : i\epsilon I\}$ puo' essere Karp soddisfacibile, ma puo' non esserci alcun insieme di funzioni $f_i:\bar{v}_i \to C$ tale che $\{\varphi_i(\bar{v}_i/f_i) : i\epsilon I\}$ sia Karp soddisfacibile. Cio' provoca delle difficolta' nel metodo delle proprieta' di consistenza che si riflettono nelle limitazioni sulla ω-validita' nelle conclusioni dei teoremi della Karp e del mio primo ricordato.

D'altra parte la formula $\forall\bar{v}\varphi$ puo' essere Cunningham soddisfacibile, ma puo' esserci una funzione $f:\bar{v}\to C$ tale che $\varphi(\bar{v}/f)$ non e' Cunningham soddisfacibile (non sarebbe cosi' se l'immagine di f fosse un insieme di variabili libere, o un insieme di costanti con interpretazione limitata). Questa peculiarita' della Cunnningham soddisfacibilita' provoca serie difficolta' tanto e' vero che la Cunningham stessa introduce la nozione di B-soddisfacibilita' in cui ogni costante individuale e' interpretata in un prefissato A_n; cio' e il modo come vengono usate le costanti nelle proprieta' di consistenza introducono un limite alla liberta' di interpretare le costanti. Ma questo limite diviene addirittura troppo stretto per poter estendere il teorema di interpolazione della Cunningham ad uno alla Maehara Takeuti. Il problema di questa estensione e' che nella dimostrazione del teorema di Maehara e Takeuti usando le proprieta' di consistenza bisogna introdurre un interpolante le cui costanti individuali non sono solo quelle in comune tra antecedente e conseguente, ma tutte quelle che occorrono nel conseguente, cosi' anche al passo della quantificazione esistenziale ci sono delle costanti da eliminare nell'interpolante, e la difficolta' e stabilire un limite per l'interpretazione di queste costanti.

Per restare fedele alla posizione della Karp, ma nello stesso tempo ampliare i suoi risultati, io introdussi la nozione di buona ω-successione di insiemi di enunciati, che si adatta bene a seguire l'analisi degli insiemi di formule esistenziali nelle proprieta' di consistenza.[4]

Sia $\kappa=\bigcup\{\kappa_n:n\in\omega\}$ con $2^{|\kappa_n|}\leq|\kappa_{n+1}|$ e, per ogni n in ω, sia C_n un insieme di costanti individuali di cardinalita' κ_n, e sia $C=\bigcup\{C_n:n\omega\}$.

Una buona ω-successione di insiemi di enunciati e' una ω-successione $S=\langle s_n:n\in\omega\rangle$ di insiemi s_n di enunciati tale che

1) $|\bigcup\{s_n:n\in\omega\}|\leq\kappa$;

2)a. per ogni $n>0$ gli enunciati in s_n sono del tipo $-F(\bar{v}_F/f)$ con f funzione 1-1 da $\bar{v}_F$ in C_n e l'enunciato $-\forall\bar{v}_F F\in\bigcup\{s_j:j<n\}$;

b. s_n e' un insieme di enunciati di $L_{\kappa\kappa}(C_n)$;

3) C'e' un numero naturale n' tale che per ogni $n>n'$ si ha che $|s_n|\leq\kappa_{n'}$ e s_0 e' un insieme di enunciati in $L_{\kappa\kappa}(C_{n'})$.

Diremo che una ω-successione di strutture $\mathfrak{A}$ ω-soddisfa una buona ω-successione di insiemi di enunciati $S=\langle s_n:n\in\omega\rangle$, e scriveremo $\mathfrak{A}\models^{\omega}S$, se per ogni $p\in\omega$ si ha che $\mathfrak{A}$ Karp soddisfa l'unione delle s_n per $n\leq p$, $\mathfrak{A}\models^{\omega}\bigcup\{s_n:n\leq p\}$.

Con questa nozione di soddisfacibilita', che e' piu' vicina a quella della Karp che a quella della Cunningham, dimostrai pure il teorema di interpolazione della Cunningham. Ma cio' non e' ancora sufficiente per l'ultimo risultato che ho ottenuto e che ho enunciato precedentemente. Per arrivare a questo risultato ho introdotto una ulteriore nozione di soddisfacibilita' in caso di presenza di costanti che si avvicina a quella della Cunningham, ma non e' altrettanto liberale.

Diremo che un insieme di enunciati S e' pseudosoddisfacibile se c'e' una ω-catena di strutture $\mathfrak{A}$ che Cunningham soddisfa S tale che l'interpretazione delle costanti che sono in una stessa formula di S e' limitata in $\mathfrak{A}$.

Si noti che se l'insieme di enunciati contiene un numero finito di formule allora pseudosoddisfacibilita', Karp soddisfacibilita' e ω-soddisfacibilita' coincidono tra loro e differiscono dalla Cunningham soddisfacibilita'.

Per avere un'idea di come queste nozioni vengano sfruttate do', a titolo di esempio, la definizione di interpolante per una buona ω-successione $S=\langle s_j:j\in\omega\rangle$ rispetto a $G(A)$. Questo sara' una formula del primo ordine $H(A)$ tale che:

A) non ci sono costanti in $H(A)$ e le sue sole variabili libere sono in A;

B) $\underline{S}(G/H)$ non e' pseudosoddisfacibile, dove $\underline{S}=\bigcup\{s_j:j\in\omega\}$ e G/H indica la sostituzione delle varianti di G occorrenti in $\underline{S}$ con le corrispondenti varianti di H;

C) $H(A)\&-G(A)$ non e' ω-soddisfacibile.

Maehara e Takeuti avevano dimostrato il loro risultato spezzandolo in due teoremi, ma nella presente situazione cio' non e' possibile. Questo fenomento e' dovuto alla necessita' di usare il corrispondente del loro primo teorema nella dimostrazione del secondo quando sono gia' state introdotte delle costanti e non e' indifferente la scelta su come interpretarle. Anche un approccio alla Cunningham presenta molte difficolta' sul come ridurre le eventuali costanti occorrenti nell'interpolante. Percio' ho dovuto unificare la dimostrazione come gia' dovetti fare nel mio primo lavoro ricordato, introducendo anche la nozione di insieme di interpolazione, che qui voglio ricordare a conclusione di questa presentazione.

Se (S_1, S^*_2) e' una buona partizione per S e Q_{S_2} e' l'insieme degli indici delle funzioni α_q che fanno ottenere dalle sottoformule di G(A) in S^*_2 le corrispondenti varianti di sottoformule di G(A) in S, per insieme interpolante per S rispetto a (S_1, S^*_2) e ad H intendiamo un insieme $D=\{D_q : q \in Q_{S_2}\}$ di formule del primo ordine tale che:

A] non ci sono costanti predicative in D_q, le costanti individuali in D_q occorrono in S^*_{2q} e le sole variabili libere in D_q sono in A;

B] L'unione degli elementi dell'ω-successione quasi buona (cioe' che viola solo la seconda parte della condizione 3) della definizione di buona ω-succesione)

$\langle s_{1,0} \cup \{-D_q(A/\alpha_q) : q \in Q_{S_2}\} \rangle \circ \langle s_{1,j} : j>0 \rangle (G/H)$

non e' pseudosoddisfacibile, ($\circ$ indica la concatenazione tra successioni);

C] per ogni $q \in Q_{S_2}$ si ha che $\langle s^*_{2q,0} \cup \{D_q\} \rangle \circ \langle s^*_{2q,j} : j>0 \rangle$ non e' pseudosoddisfacibile.

Per non appesantire tecnicamente questa esposizione, diro' solo che una buona partizione (S_1, S^*_2) per S e' una coppia di ω-successioni che combinate assieme per componenti danno S e rappresenta per le ω-successioni la divisione tra antecedente e conseguente per le formule del tipo F→G; inoltre in S^*_2 occorrono solo sottoformule di G(A) quindi della forma generale e non delle singole varianti di G(A) che di fatto occorrono in S.

Bibbliografia:

[1] C.C. CHANG, Two interpolation theorems, in Proceedings of the Rome conference on model theory, Symposia Mathematica, Vol. V, Academic Press, New York, 1970, pp. 5-19.

[2] E. CUNNINGHAM, Chain models: applications of consistency properties and back-and-forth tecniques in infinite quantifier languages, in Infinitary logic: in memoriam Carol Karp, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[3] R. FERRO, Interpolation theorems for $L^{2+}_{\kappa\kappa}$, JSL, Vol.53(1978), pp. 535-549.

[4] R. FERRO, Seq-consistency property and interpolation theorems, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol.70 (1983), pp. 133-145.

[5] R.FERRO, Strong Maehara Takeuti type interpolation theorem for $L^{2+}_{\kappa\kappa}$, di prossima pubblicazione.

[6] E.G.K. LOPEZ-ESCOBAR, An interpolation theorem for denumerably long sentences, Fundamenta Matematicae, vol.57 (1965), pp.253-272.

[7] C. KARP, Infinite quantifier languages and ω-chains of models, Proceedings of the Tarski Symposium, American Mathematical Society, Providence, 1974.

[8] S. MAEHARA e G. TAKEUTI, Two interpolation theorems for a positive second order predicate calculus, JSL, Vol 36 (1971), pp. 262-270.

[9] J.I. MALITZ, Infinitary analogs of theorems from first order model theory, JSL, Vol. 36 (1971), pp. 216-228.