Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Γ LIMITI E ANALISI NON-STANDARD

VINCENZO MARIA TORTORELLI
S.N.S., Pisa

1. Introduzione

In questa comunicazione si espongono i principali risultati di una nota dell'autore, "Γ limiti e analisi non standard", che apparirà nei Rend. CL. S.I.M.V. Ac. Naz. Lincei fasc. 1-4, vol. LXXIX.
Si tratta di una caratterizzazione dei Γ limiti di funzioni di più variabili proposti da E. De Giorgi per trattare i vari concetti di limite sviluppatisi nei diversi settori dell'analisi matematica negli ultimi anni.

L'ambiente standard in cui opereremo sarà il seguente: A_0 insieme di atomi, contenente $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$; definiamo $A_{n+1}=\mathcal{P}(A_0\cup A_n)$, per $n\in\mathbb{N}$, e $A=\cup A_n$. Come ambiente non standard potremo considerare una "superstruttura" $\overline{M}$, nel senso di E. Zakon, con relativo "monomorfismo" $*A\to\overline{M}$. Supporremo per comodità un elevato grado di saturazione.

2. Nozioni topologiche preliminari in analisi non standard

2.1 Definizione

Sia $(X,\tau)\in A$ uno spazio topologico. Siano $y\in {}^*X$ e $x\in X$. Diremo che y è <u>τ-ultravicino</u> a ${}^*x$, $y \underset{\tau}{\sim} {}^*x$ se e solo se $y\in\cap\{{}^*V: x\in V\in\tau\}$.

Il dominio della relazione $\underset{\tau}{\sim}$ sarà indicato con $uv({}^*X)$.

2.2 Definizione

Sia $H \subseteq {}^*X$, definiamo <u>τ-ombra</u> di H l'insieme

$$\delta_\tau(H) = \{x\in X : \exists h\in H \ h \underset{\tau}{\sim} {}^*x\}.$$

Scriveremo inoltre $\delta(y)=x$, con $y\in{}^*X$ e $x\in X$ se e solo se $\delta_\tau(\{y\})=\{x\}$.

Osservazione

Se X è di Hausdorff allora è ben definita una funzione f da $uv({}^*X)$ in X tale che $f(y)=\delta(y)$. Se X è compatto $uv({}^*X)={}^*X$.

2.3 Teorema

Se C è un sottoinsieme interno di ${}^*X$, o un'arbitraria intersezione di sottoinsiemi standard, allora $\delta(C)$ è un chiuso di X. In particolare $\delta({}^*B)=\overline{B}$.

3. <u>Massimo e minimo limite</u>

3.1 Proposizione

Sia E la topologia euclidea estesa ad $\overline{\mathbb{R}}$ $\cdot$ δ_E è un omomorfismo tra i reticoli ${}^*\overline{\mathbb{R}}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, ${}^*P(\overline{\mathbb{R}})-P(\mathbb{R})$ completo. Inoltre quando ha senso $\delta(a+b)=\delta(a)+(b)$ e $\delta(a\cdot b)=$ $=\delta(a)\cdot\delta(b)$.

3.2 Teorema

Siano $(X,\tau)\in A$, $x_0\in X$, $f\in\overline{\mathbb{R}}^X$. Allora

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \min_{y \underset{\tau}{\sim} {}^*x_0} \delta({}^*f(y)).$$

Le ipotesi, x_0 e f standard, sono necessarie come mostrano i seguenti esempi:

3.3

$X=\mathbb{R}$; $g=\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$, $\varepsilon\sim 0$. Si ha $\min_{y\sim 0}\delta g=0$ mentre ${}^*\operatorname*{(minlim)}_{y\to 0} g=1$.

3.4

$X=(0,1)$; $f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{I_n}$, $I_n=(1/n-1/2n^n;\ 1/n+1/2n^n)$; $x_0=1/\nu$, $\nu\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Si ha $\min_{y\sim 1/\nu}\delta{}^*f=0$, mentre ${}^*\operatorname*{(minlim)}_{y\to 1/\nu}{}^*f=1$.

Osservazione

Se X è compatto ha senso ed è vera la seguente diseguaglianza: $\delta({}^*\operatorname*{(minlim)}_{\to y} g) \geq \min_{\sim{}^*\delta y}\delta g$.

4. <u>Γ operatori</u>

Notazioni

Sia $(X,\tau)\in A$ uno spazio topologico. Considereremo nel seguito i seguenti filtri: $I_x^\tau=\{V\in\tau : x\in V\}$, $x\in X$; $I_y^{*\tau}=\{V\in{}^*\tau : y\in V\}$; $F_y^\tau=\{{}^*V : V\in\tau, y\in{}^*V\}$, $y\in{}^*X$.

Inoltre indicheremo con ext^α il sup., se $\alpha=+$; l'inf. se $\alpha=-$. Analogamente con $\overline{\mathrm{ext}}^\alpha$ max, min. La giustapposizione dei segni + e - va così intesa: ++=--=+, +-=-+=-.

4.1 Definizione

Siano $(X_i,\tau_i)\in A$ n spazi topologici, $E_i\subseteq X_i$, f funzione da $E_1\times\dots\times E_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$, $x_i\in X_i$. Definiamo

$$(\Gamma(E_1^{\alpha_1}\dots E_n^{\alpha_n})f)(x_1\dots x_m)=\mathrm{ext}^{-\alpha_n}_{I^{\tau_n}_{x_n}}\dots\mathrm{ext}^{-\alpha_1}_{I^{\tau_1}_{x_1}}\mathrm{ext}^{\alpha_1}_{V_1\cap E_1}\dots\mathrm{ext}^{\alpha_n}_{V_n\cap E_n}f$$

Vediamo alcuni esempi:

4.2 $(\Gamma(X_1^+)f)(x_0) = \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f$

4.3 $(\Gamma(X_1^+, X_2^-)f)(x_1,x_2) = \sup_{V_2\in I^{\tau_2}_{x_2}} \inf_{V_1\in I^{\tau_1}_{x_1}} \sup_{y_1\in V_1} \inf_{y_2\in V_2} f$

4.4 $\Gamma(X_1^+, X_2^+)f = \operatorname*{maxlim}_{\tau_1 \times \tau_2} f$

4.5 $\Gamma(\overline{\mathbb{N}}^{\alpha}, X^{\beta})f$ da nozioni di convergenza utili e significative in calcolo delle variazioni, come preservare la convergenza dei minimi al minimo (cfr. E. De Giorgi, T. Franzoni: "Su un tipo di convergenza variazionale" 1979. Rend. S. Mat. Brescia, vol. III, estratto pag. 80).

5. Γ limiti e analisi non standard

5.1 Lemma

Siano $X_i \in A$, n insiemi, M_i intersezioni arbitrarie di sottoinsiemi standard di $^*X_i$, o sotto insiemi interni di $^*X_i$. Sia poi g una funzione interna da $^*X_1 \times \ldots \times ^*X_?$ in $^*\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono x_i in M_i:

$$\delta g(x_1,\ldots,x_n) = \operatorname*{ext}_{M_1}^{\alpha_1} \ldots \operatorname*{ext}_{M_n}^{\alpha_n} \delta g$$

5.2 Teorema

Siano (X,τ) e (Y,σ) spazi topologici in A, $(x_0,y_0) \in \in X \times Y$, e $f \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$. Allora:

$$\Gamma(X^+, Y^-)f(x_0\ y_0) = \sup_{x \underset{\tau}{\sim} x_0} \min_{y \underset{\sigma}{\sim} y_0} \delta \circ {}^*f$$

Un risultato analogo vale nel caso (X^-, Y^+).

5.3 Un problema

Definendo $\gamma(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}) f(x_1 \ldots x_n) = \operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{\bigcap F^{\tau_1}_{*x_1}} \ldots \overline{\operatorname*{ext}}^{\alpha_n}_{\bigcap F^{\tau_n}_{*x_n}} \delta \circ {}^*f$

quando si ha in generale $\gamma = \Gamma$ per n>2?

Si sono finora dimostrate diseguaglianze del tipo:

$$\gamma(X_1^+, X_2^-, X_3^+) \le \Gamma(X_1^+, X_2^-, X_3^+).$$