Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

OGGETTI CLASSIFICANTI PER CATEGORIE ALGEBRICHE

A. BARBARA VEIT
Università di Tor Vergata, Roma

Questa ricerca, svolta in collaborazione con F. Borceux (Lovanio), si colloca nell'ambito dell'algebra categoriale. Com'è noto, in questo contesto una teoria viene concepita come una categoria $\mathbb{T}$, e un suo modello è un funtore da $\mathbb{T}$ in qualche altra categoria $\mathbb{C}$. La differenza fondamentale rispetto alla teoria dei modelli consiste non tanto nel fatto che, ovviamente, tutte le nozioni vengono formulate in termini categoriali, quanto nella scelta degli universi di interpretazione che non si limita affatto alla categoria degli insiemi. Così, per esempio, se $\mathbb{T}$ è la (categoria associata alla) teoria dei gruppi abeliani, un suo modello in Ins è ben inteso un onesto gruppo abeliano, mentre nella categoria dei fasci sopra uno spazio topologico X, un modello di $\mathbb{T}$ è un fascio di gruppi abeliani su X. Questa "semantica funtoriale", conosce, come la logica classica, tutta una gerarchia di classi di teorie sempre più ricche che parte dalle teorie algebriche (≅ teorie equazionali) per andare fino ai topos elementari (≅ teorie degli insiemi intuizioniste di ordine superiore), cfr. l'articolo *Doctrines in Categorical Logic* di A. Kock e G. E. Reyes nel Handbook (ed. Barwise).

Un'ampia classe di teorie e costituita dalle cosiddette teorie cartesiane o lim-teorie le quali, al livello sintattico, coincidono pressappoco con le teorie di 1° ordine assiomatizzabili tramite "Horn sentences", i.e. enunciati della forma $\forall\, x\ (p(x) \Longrightarrow \exists !\ y\ (q(x,y)))$, p e q essendo congiunzioni di formule atomiche. Una teoria cartesiana è una categoria cartesiana, i.e. una categoria piccola $\mathbb{T}$ con limiti finiti, e un suo modello è un funtore da $\mathbb{T}$ in qualche categoria cartesiana $\mathbb{C}$ che rispetta i limiti finiti. Il testo classico in questo campo è: Gabriel-Ulmer: Lokal präsentierbare Kategorien, SLN 221, che indaga sulle proprietà categoriali di categorie della forma MOD $(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, dove $\mathbb{C}$ è localmente presentabile.

Solo raramente MOD $(\mathbb{T},\mathbb{C})$ è un topos, anche quando $\mathbb{C}$=Ins: ciò è vero quando $\mathbb{T}$ ha (sostanzialmente) solo operazione unarie, e poi ancora in qualche caso di teoria con arità al più 2 (cfr. Adelmann-Johnstone, When is an algebraic category a topos). Tuttavia, MOD$(\mathbb{T}$, Ins) forma sempre una sottocategoria riflessiva del topos (di prefasci) $\widehat{\mathrm{Fin}\mathbb{T}}$, Fin$\mathbb{T}$ essendo la categoria dei modelli insiemistici finitamente presentabili di $\mathbb{T}$. In base a questa osservazione abbiamo potuto dimostrare che MOD$(\mathbb{T}$, Ins) possiede un classificatore dei sotto-oggetti $\Omega_{\mathbb{T}}$ (il quale vive tuttavia in $\widehat{\mathrm{Fin}\mathbb{T}}$).

Sorge allora naturalmente la domanda se questo oggetto $\Omega_{\mathbb{T}}$ permette, come nel caso dei topos, una classificazione degli operatori universali di chiusura su MOD $\mathbb{T}$:= MOD$(\mathbb{T}$, Ins) tramite certi endomorfismi di $\Omega_{\mathbb{T}}$ dette topologie: la risposta è affermativa. In particolare per le teorie algebriche, lo studio della questione ha portato ad una caratterizzazione delle topologie di MOD $\mathbb{T}$ in termini di certe famiglie di sotto-oggetti di $\mathbb{T}$ (1), il modello libero di $\mathbb{T}$ ad un generatore.

Avendo notato queste analogie tra topos e categorie del tipo

MOD $\mathbb{T}$, ci siamo spinti oltre per studiare il legame tra topologie e localizzazioni di MOD $\mathbb{T}$. Vale ancora che, data una topologia j su MOD $\mathbb{T}$, la categoria dei fasci rispetto a j forma una sottocategoria riflessiva di MOD $\mathbb{T}$. Nei topos (nonchè nelle categorie abeliane), si ha addirittura una localizzazione, cioé il funtore che realizza la riflessione è esatto a sinistra; inoltre in questi casi, la corrispondenza tra topologie e localizzazioni è biunivoca. Siamo riusciti a dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè lo stesso avvenga in MOD $\mathbb{T}$, quando $\mathbb{T}$ è algebrica.

Questa condizione è soddisfatta per la maggior parte delle correnti teorie algebriche, e non è stato facile trovare dei controesempi. In particolare, tale condizione è soddisfatta per ogni teoria che gode della seguente proprietà:

> Si consideri il funtore che fa corrispondere ad ogni modello A di $\mathbb{T}$ il modello A[x] che si ottiene da A aggiungendo liberamente un elemento x (processo che, nell'algebra tradizionale, fa passare da un anello all'anello dei polinomi, da un campo ad un suo ampliamento trascendente, da un gruppo G a $G * \mathbb{Z}$ etc.). La condizione di cui sopra è soddisfatta per ogni teoria nella quale tale funtore conserva i monomorfismi, cioé A[x] è una sottostruttura di B[x] ogni volta che A è una sottostruttura di B.

La questione di caratterizzare le teorie che hanno questa proprietà (che, a prima vista, potrebbe sembrare quasi ovvia) non ha finora trovato molta attenzione da parte degli studiosi, eppure appare essere interessante.

Per ulteriori dettagli sull'argomento, cfr. F. BORCEUX e A.B. VEIT:

- Continuous Grothendieck Topologies, di prossima pubblicazione sugli "Annales de La Société Scietifique de Bruxelles";
- On the Left Exactness of Orthogonal Reflections, di prossima pubbli

cazione in "Journal of Pure and Applied Algebra". Una versione più dettagliata di questo lavoro è stata pubblicata dall'IMPA - Institut de Mathématique Pure et Appliquée Université Catholique de Louvain - Rapport N° 82 -

- Subject Classifier for Algebraic Structures, di prossima pubblicazione;
- Sheaves and Localizations, some Counterexamples, di prossima pubblicazione.