Estratto da

M. Barra e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 5, Roma 6-9 aprile 1988.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

L'ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE EN FRANCE

JOSETTE ADDA
Université Paris 7

Les organisateurs de ce colloque m'ont demandé de parler de l'évolution de l'enseignement de la logique en France; je ne puis le faire sans préciser dès l'abord que je ne représente aucune instance officielle et ne suis en aucune manière responsable des programmes scolaires. J'espère que vous m'autoriserez à faire un exposé critique qui présente mon point de vue, bien sûr subjectif.

Me permettrez-vous de commencer par des souvenirs personnels? Pendant toutes mes études secondaires, je n'ai jamais entendu parler de logique avant la dernière année, dans le cours de philosophie. Ce cours comportait plusieurs parties: philosophie générale, psychologie, morale et, seulement dans les sections scientifiques, logique.

Voici deux définitions de la logique extraites de deux manuels de philosophie très longtemps utilisés dans les lycées français: "La philosophie scientifique peut être appelée aussi "logique appliquée ou méthodologie". Elle est la partie la plus importante de la logique, étude du vrai, science des lois du raisonnement. Elle peut être considérée comme la psychologie du savant appliquant une bonne méthode. Elle est une science normative car elle impose des règles à la pensée, dit comment l'homme doit chercher la vérité dans les sciences..."

F. Challaye ed. F. Nathan 1949

"La psychologie décrit et énonce des lois, la logique prescrit et édicte des règles. La première est une science, la seconde est une partie de la philosophie" A. Cuvillier ed. A. Colin 1941

Dans l'enseignement supèrieur, la logique était alors uniquement localisée en philosophie, dans les facultés des lettres.

C'est en 1959 que G. Kreisel a été invité à faire pour la première fois un cours de logique mathématique à la Faculté des Sciences de Paris.

D. Lacombe avait déjà commencé des recherches en logique (récursivité) en France (sous la direction théorique de G. Bachelard), puis aux U.S.A.; de retour en France, il fera à Paris, à partir de 1960, un cours intitulé "logique et programmation" pour mathématiciens et pour les premiers informaticiens.

Les "mathématiques modernes" (calcul ensembliste, structures algébriques et topologie) étaient entrées à la Faculté des Sciences de Paris en 1954 (cours de G.Choquet); au début des années 60, elles avaient atteint le recyclage des professeurs de l'enseignement secondaire (par l'Association des Professeurs de Mathématiques et la Société Mathématique de France) mais sans rudiments de logique.

Depuis ce temps, bien sûr, plusieurs cours de logique mathématique ont été créés dans les universités (3ème cycle, licence, puis maîtrise) notamment à Paris 7 où s'est développée une assez nombreuse équipe de recherches en logique mathématique, mais il n'y a même pas encore d'enseignement de logique dans les départements de mathématiques de toutes les universités françaises.

En ce qui concerne les enseignements secondaire et primaire, la "Commission Lichnérowicz", qui a élaboré les programmes "maths-modernes" entrés en vigueur à partir de 1969 ne comportait aucun logicien. Cependant, le calcul propositionnel est apparu dans les programmes français dès 1969 simultanément en 6ème (1ère année de l'école moyenne) et en 2nde (1ère année de l'école secondaire supèrieure) parallèlement à des expèriences dans certaines écoles primaires, surtout "ensemblistes" au sens de Dienes. On confondait alors "logique" et "théorie des ensembles", cette dernière expression ne recouvrant pas une théorie mathématique mais l'étude de la stucture algébrique sur l'ensemble des parties d'un ensemble référentiel donné, ce qui revient à traiter des opérations sur les prédicats définis sur ce référentiel mais sans quantification. Ainsi, on considérait une structure isomorphe à l'algèbre du calcul des propositions

Les premières années ont donné lieu à des enseignements tout à fait extravagants (notamment au travers des manuels qui étaient suivis et reproduits dans les classes). Outre les manipulations de blocs logiques que l'on a connues dans tous les pays (ex: *Sortez vos ensembles de votre cartable*") et les rites de "fabrication d'ensembles" avec des ficelles (ex: *"Voici un panier de coquillages, prenez cette ficelle et faites-moi un ensemble de coquillages-Est-ce que vous avez fini l'ensemble?-non, il manque l'étiquette"*-On pourra d'ailleurs remarquer la contradiction entre les emplois du mot "ensemble " dans ces deux exemples), il y a eu deux modes, pendant plusieurs années, dans les classes expérimentales:

1-jeux syntaxiques: l'écriture de formules du calcul propositionnel avec des symboles figurant sur des dès ou des cartes-l'emploi de la notation polonaise (notons qu'elle n'était pas du tout utilisée pour les formules numériques, même par ces auteurs).

2-jeux sémantiques: application du langage ensembliste ou logique à des situations "familières": ex: "l'intersection de l'ensemble des enfants portant des lunettes avec l'ensemble des enfants de sexe masculin" (pour parler simplement des garçons à lunettes) ou "les cartons non bleus ou ronds" (ambigu lorsqu'il est entendu, les parenthèses n'appartenant pas à la langue orale); si cet apprentissage avait "réussi", la langue française de la nouvelle génération aurait été bien atteinte!

A cette époque, on entendait d'ailleurs souvent dire que les mathématiques étaient purement et simplement réduites à un langage (ex, un livre intitulé "Mathématique moderne, langage du futur" par G.Van Hout-Nauwelaerts-Louvain 1970). On ne pensait pas aux objets mathématiques et à leurs propriétés mais à la manière d'en parler: cet escamotage du fond au profit de la forme devait inéluctablement conduire à une réaction avec accusation de "formalisme" (contrairement à ce qui a été souvent dit ce n'était pas causé par un excès d'abstraction mais au contraire en grande partie à cause du refus de traiter des objets abstraits adéquats au profit de signifiés littéralement impensables, inimaginables parce qu'étrangers tant au monde des réalités qu'au monde des idées).

Nous savons qu'il n'y a pas identité entre les usages d'une même expression en mathématiques et dans la vie courante: ex: "il y a un truc tel que..." n'est pas considéré comme vrai, ordinairement, dans un cas où il y a deux trucs tels que..; "certains trucs sont..." n'est pas non plus considéré comme vrai s'il n'y a qu'un seul truc qui est ...et "tous les garçons du groupe ont des lunettes" n'est pas considéré comme vrai s'il n'y a pas du tout de garçon dans le groupe. Ces exemples sont extraits d'un excellent article de T.Varga (in Educational Studies in Mathematics-1972). On remarquera que cet article rendait compte des expèriences faites en Hongrie, qu'il était traduit en anglais et tout à fait adapté aux problèmes linguistiques du français, et, je crois, de l'italien; ce qui montre bien la distance entre les usages mathématiques et non-mathématiques de toutes les langues naturelles et l'intérêt d'utiliser dans certains cas d'ambiguité (dans la "réalité", c'est le contexte qui permet de décoder) une langue artificielle, construite ad hoc .

Les exemples cités plus haut portent sur l'expression des quantifications mais le problème est le même pour les connecteurs: rappelons rapidement quelques exemples bien connus: les différents sens du "ou", ainsi que ceux du "et", l'usage du "si ... alors" avec le sens de "si et seulement si" et /ou surtout avec le sens de "chaque fois que...alors" (quantification universelle intégrée); on voit combien il était illusoire de prétendre étudier l'implication mathématique à partir de "situations concrètes" du genre "s'il pleut, alors je prends mon parapluie". On a pu noter que tous les manuels de mathématiques commençaient par un chapitre de logique (souvent intitulé "chapitre 0") qui n'était plus utilisé dans la suite du cours! La raison en est simple: ce premier chapitre présentait les tables de vérité du calcul propositionnel et, quelquefois, des paragraphes plus ou moins informels sur les "modes de raisonnement" mais sans aucune allusion aux quantifications ,ni,souvent,à la notion de variable (traitée au mieux dans un chapitre ultèrieur sur les équations),or,à un niveau aussi élémentaire que ce soit, les mathématiques ne peuvent se traiter sans se placer à l'intèrieur du calcul des prédicats du 1er ordre au moins.Un théorème ne concerne jamais des objets totalement isolés mais des propriétés d'ensembles(ou de classes),non seulement pour les théorèmes de la forme "tous les trucs sont des machins" mais aussi les énoncés existentiels("il existe un truc qui est un machin"qui parle des prédicats être truc et être machin) et même "$\sqrt{2}$ est irrationnel" qui parle de l'ensemble des rationnels et des propriétés qui les caractérisent.Il reste bien sûr des énoncés tels que $\sqrt{2} < 2$ mais ils sont soit obtenus comme résultats de développements mathématiques utilisant des prédicats, soit utilisés dans le cours de développements conduisant à des résultats plus généraux. Il n'y a pas d'activité mathématique dont ,à la fois,les points de départ ,le développement et le résultat se déroulent uniquement dans le calcul propositionnel(nota:les théorèmes du calcul propositionnel sont des théorèmes métamathématiques quantifiés relativement aux propositions).

On pourra lire en annexe un extrait d'une leçon sur les relations d'ordre enregistrée dans une classe de 5éme(élèves de 12 ans environ) elle semble caricaturale mais est malheureusement authentique.Bien sûr, de pareilles énormités n'ont pas été proférées dans toutes les classes mais on voit où peut conduire l'aberration de prétendre par exemple définir l'antisymétrie d'une relation sans mettre en évidence les quantifications qui interviennent.Ce qui a été souvent appelé"formalisme" apparait bien sous son jour de pédantisme et ses conséquences de psittacisme.Les élèves, au cours de toute la leçon dont cette séquence est extraite, ont répété des définitions sans même s'apercevoir que leurs phrases ne pouvaient pas avoir de sens .N'ayant pas compris lui-même le rôle de la quantification en a et b,le professeur dresse les élèves,tels des animaux savants, avec un " $1 \leqslant 1$ et $1 \leqslant 1$ donc $1 = 1$ " accepté par toute la classe et qui me donne beaucoup à méditer sur les facultés de résignation des êtres humains, notamment dans l'institution scolaire, et me semble bien expliquer pourquoi tant de gens prétendent qu'il n'y a "pas de sens qui circule dans la classe de mathématiques" et que tout y est formel. Au contraire,on avait ici une occasion de bien comprendre l'intérêt de l'expression mathématique "inférieur ou égal à":comme le rappelait,ici même, le Professeur Freudenthal en parlant des carrés considérés comme parallélogrammes selon un usage particulier aux mathématiques(principe"truth/whole truth"aussi étudié longuement par O.Ducrot sous le nom de "principe d'exhaustivité" et par D.Lacombe sous le nom de "principe du maximum d'information"),"a inférieur ou égal à b"est nécessaire dans toutes les circonstances où un ensemble de cas est à considérer sans choisir a priori entre "a inférieur à b" et "a égal b"tandis qu'il n'est pas du tout naturel d'exprimer ainsi l'information lorsque seul l'un des termes de l'alternative est concerné.

On voit ici un effet pervers d'une prudence excessive par rapport au formalisme mathématique:c'est parce qu'on avait interdit explicitement l'étude des quantifications par exemple qu'on a été conduit à des discours inévitablement sans signification.Il a fallu une dizaine d'années pour que les officiels se rendent compte que "les chapitres sur les relations ne passaient pas"chez les élèves de 5ème.

Les critiques faites ont opposé"logique formelle" à "mathématiques concrètes"(considérées comme souhaitables),alors que:

1-il me semble que l'expression "mathématiques concrètes"est une absurdité en raison de la nature même des mathématiques

2-l'enseignement avait,au contraire,conduit à un "concret formel" (faux concret,tout à fait artificiel et spécifique du système scolaire et également inadapté aux mathématiques)

3-la "théorie des ensembles" a dégénéré en "patatomanie" par une inversion-perversion où les ensembles d'objets ne devenaient ensembles que lorsqu'ils étaient disposés selon le schéma de Venn créé pour les représenter.Les signifiants prenaient la place des signifiés,les propriétés des relations n'étaient plus que des propriétés de flêches et les exercices mathématiques n'étaient plus que des rituels idolâtres sur des dessins:oui,en ce sens-là,c'est vrai que c'était un enseignement formel puisque le fond,les significations étaient absentes...faute de s'être donné les moyens formels d'en traiter.

On connait la critique très violente faite par R.Thom au Congrès d'Exeter(ICME 2 -1972):"...la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité,qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie:à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes";il a dit aussi:"...pour apprendre à marcher,il serait plus nuisible qu'utile de connaître l'anatomie de la jambe." je crois qu'il oubliait tout simplement l'existence de l'erreur en mathématiques:M.Jourdain(dans le Bourgeois gentilhomme)était ridicule d'apprendre comment se prononcent les voyelles françaises qu'ils savait prononcer spontanément mais il m'a été utile d'étudier comment placer la langue pour rectifier ma mauvaise prononciation du "the"anglais;on sait bien que les rééducateurs ont quelquefois besoin de faire prendre conscience des gestes que nous considérons comme spontanés.Tous les élèves,loin de là,ne sont pas spontanément de brillants mathématiciens, l'enseignement peut les aider en rendant explicite ce qui est implicite dans la pratique mathématicienne. C'est en cela qu'une "analyse logique" de ce qui est exprimé doit permettre aux élèves, non pas de rester au niveau de la forme, mais justement d'accéder au sens de cette expression (le langage mathématique n'est plus un jargon, une "langue de bois", si l'on comprend ce qu'il exprime qui n'est pas forcément concret). J'ai expérimenté de 1970 à 1974 un tel enseignement de mathématiques pour des étudiants en sciences humaines de l'Université Paris 7 (Cf. "Initiation au langage mathématique-Analyse d'une expèrience d'enseignement" publié par l'APMEP-)

Malheureusement, dès que, à partir de 1972, a commencé une réaction à l'enseignement pratiqué, elle a pris la logique pour cible, et, au lieu de la développer, elle l'a supprimée progressivement:

-le chapitre 0 n'est pas utilisé? supprimons-le (au lieu de le compléter par ce qui lui manquait pour expliciter le discours mathématique)

-de la même manière, d'ailleurs: les élèves ne savent pas faire de démonstrations? supprimons-les. L'analyse des manuels successifs d'un même éditeur est très éclairante; la réaction aux échecs en mathématiques a été enfin trouvée: le mieux est de ne plus faire de mathématiques. Exemple du théorème de Pythagore chez l'éditeur F. Nathan: en 1968, le chapitre occupait 9 pages, en 1972, il y avait 24 pages pour aboutir aux deux énoncés suivants:

Première forme: Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation: $k^2+k'^2=1$

Deuxième forme: Si A, B et C sont trois points distincts du plan euclidien, les droites (AC) et (AB) sont orthogonales si et seulement si: $[d(B,C)]^2=[d(A,B)]^2+[d(A,C)]^2$

(Surtout, ne pas parler de triangle rectangle, ni d'angle droit!) mais, en 1980, 12 pages assez voisines du style de 1968, et enfin, en 1984, trois pages, où l'énoncé classique et sa réciproque sont suivis de "Ces énoncés sont pour toi des axiomes", illustrées d'un charmant dessin de bateau dont la voile est un triangle rectangle (vu en perspective, bien sûr) aux côtés portant les nombres 3, 4, 5.

Dans la dernière version (juillet 1987) du programme officiel pour la classe de 6ème, on relève "Les symboles $\subset$, $\cap$, $\cup$ sont hors programme, ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations" (naturellement, il n'y a plus aucune allusion aux connecteurs logiques); dans le §"Construction de figures..." citons la phrase "la locution "propriété caractéristique" n'a pas à être employée" et, dans le § "équations": "certains problèmes concrets se traduisent par la recherche d'un élément manquant dans une addition ou dans une multiplication: c'est ce qu'on appelle une équation, mais il n'est pas nécessaire de désigner par une lettre le nombre manquant."

Dans le second cycle de l'enseignement secondaire, on savait que les élèves avaient beaucoup de difficultés avec les notions de limite et de continuité, là, tout de même, les programmes antèrieurs permettaient les quantifications soit en langage naturel soit même avec des $\forall$ $\exists$, les nouveaux programmes (juillet 1985) comportent pour la classe de 1ère scientifique: "La définition des limites par (A,N) ou (ε,N) est en dehors du programme, ainsi que le théorème des suites croissantes majorées. Il est important que les élèves sachent classer entre elles les suites de référence, mais aucune démonstration n'est exigible à ce sujet.... Dans les problèmes de limites, les seules capacités exigibles des élèves portent sur l'étude de suites $u_n=f(n)$ pour lesquelles une des minorations ou majorations indiquées dans le programme permet de conclure et est facile à obtenir."
et, pour la Terminale scientifique: "Pour la convergence, le point de vue adopté reste le même qu'en première. Les définitions par (ε,N) et (A,N) et l'introduction de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ sont hors programme"

Cet esprit est mis en oeuvre dans les manuels parus où l'analyse devient une suite de définitions informelles et de théorèmes non démontrés "admis".

Certes, avant cette réforme récente, beaucoup d'étudiants en mathématiques entrant à l'université n'avaient pas bien compris les notions de limite et de continuité; les définitions en ε,η avaient été leur premier contact avec les manipulations de quantificateurs alors qu'un apprentissage progressif aurait pu en être démarré plus tôt (ex $\forall x \exists y \quad y \leqslant x$ et $\exists y \forall x \quad y \leqslant x$ dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$). La plupart d'entre eux n'avaient même pas bien compris ce qu'est un raisonnement par contre-exemple. Ayant eu à enseigner en 1986-87, une option de logique pour étudiants de 2ème année de mathématiques à l'Université Paris 7 j'avais commencé par les soumettre au questionnaire anonyme figurant en annexe 2 (à partir d'un questionnaire de Y. Paquelier). L'analyse, avec eux de leurs nombreuses erreurs, a servi de point de départ et de motivation pour l'enseignement (prédicats dès le début puis calcul des propositions et manipulation de quantificateurs, complété par des rudiments de théorie des ensembles) qui se voulait explicitation des démarches mathématiques et où la logique n'était pas considérée pour elle-même mais pour ses applications aux autres cours de mathématiques. Dans des conversations orales comme dans l'enquête d'opinion que j'ai faite en fin de semestre, plusieurs étudiants m'ont exprimé qu'ils s'étonnaient que cet enseignement ne soit pas obligatoire et même que tout cela ne leur ait pas été enseigné plus tôt (pourquoi leur avoir caché ce qui les aidait?)

Je dois dire ,cependant,que ce point de vue n'est pas partagé par tout le monde en France.Marc Legrand(Université de Grenoble)affirme même dans son cours de 1er cycle:"...le fait de faire un cours de logique,de faire des tables de vérité,des choses comme ça,ne modifie pas les contre-sens qui peuvent suivre...c'est-à-dire qu'ils pourront très bien réciter les tables de vérité si on leur demande,çà ne les empêchera absolument pas en situation d'action de continuer à appliquer leur logique propre et de ne pas forcément comprendre la logique mathématique.Donc,on ne va pas prendre cette solution...Le but de l'opération d'aujourd'hui est d'essayer d'aller plus loin au niveau de la compréhension des mécanismes de la logique mathématique... par le biais d'un circuit électrique..."La leçon présentée(publication Grenoble DEUG A 11 "Atelier circuit"1987/88)ne me convainc absolument pas,les élèves étant sûrement encore moins à même de l'appliquer aux démonstrations mathématiques qu'une leçon de logique-à condition ,bien sûr, que cette logique soit bien présentée comme métamathématique,c'est-à-dire,à mon sens,que sa relation aux mathématiques soit constamment présente.

Ceci nous ramène à la critique de la conception:"logique=chapitre 0" la logique enseignée ne sera pas appliquée aux mathématiques par les élèves si cette application ne leur a pas été enseignée.Ce n'est là qu'un cas particulier (ici au niveau de la métamathématique)de la question plus générale du transfert par les élèves de leurs connaissances en mathématiques à la résolution de problèmes:faut-il répéter ici,ce qui devrait être un lieu commun,que l'enseignement n'est pas seulement transmission de connaissances?Nous avons aussi à communiquer des attitudes,or,faire comprendre ce qu'est l'attitude mathématique nécessite de développer la pensée réflexive et d'amener les étudiants à expliciter ,préciser et,le cas échéant,formaliser le discours mathématique.Il semble que les programmes actuels nous laissent peu de liberté pour agir dans ce sens,pouvons -nous espérer que la situation change vraiment avec le prochain coup de balancier, la prochaine réforme,que l'introduction de l'informatique dans l'enseignement permet de prévoir pour bientôt?

Bibliographie:

J.ADDA-1970-Eléments de logique pour enseignants de mathématiques-brochure APMEP

J.ADDA-1975-L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques-in Nico -Décembre 1975

J.ADDA-1975-Initiation au langage mathématique-Analyse d'une expérience d'enseignement-ouvrage publié par APMEP avec une préface de H.Freudenthal

R.THOM-1972-Mathématiques modernes et mathématiques de toujours-ICME2 Exeter -paru dans "Pourquoi la mathématique" Collection 10-18-

T.VARGA-1972-Logic and probability in the lower grades-in Educational Studies in Mathematics-vol4

ANNEXE 1-Extrait d'une leçon enregistrée en 1974 dans une classe de cinquième (enfants de 13à 14 ans environ)

au début de la leçon,le professeur a défini les relations d'ordre

P-Maintenant,quelqu'un va venir traiter un exemple.Tiens!Toi!
Alors,tu considères l'ensemble $E=\{1,2,3,4,5\}$ et tu diras qu'un élément a appartenant à E est en relation par R avec un élément b appartenant à E si a est inférieur ou égal à b.
Il vaut mieux ne pas l'écrire comme ça,écris:
aRb si et seulement si $a\leqslant b$.
La question est simple,je te demande si c'est une relation d'ordre.
Alors,qu'est-ce qu'il faudra que tu fasses?
E-Il faut qu'elle soit réflexive,transitive et antisymétrique.
P-Oui,prouve-moi-le.
E-Elle est reflexive...
P-Ecris-le.Reflexive,ça veut dire quoi?
E-Que tout élément de E est en relation avec lui-même.
P-Alors?La relation R est-elle reflexive?
E-Oui
P- Pourquoi?
E-1 est en relation avec 1
P-Alors,écris .1R1 ça veut dire quoi?1R1?
Tu lui dis?
E'- 1 inférieur ou égal à 1.
P-ça s'écrit comment?
E- $1\leqslant 1$
P-Est-ce que c'est vrai?Pourquoi?
E- 1 est égal à 1,...
P- Puisqu'on a l'égalité $1=1$,$1\leqslant 1$ c'est vrai et puis on le voit pour tous les éléments de E.
Maintenant est-elle transitive?Ecris-moi ce que veut dire transitive.
E- 1 est en relation avec 2.
P- oui

E-...Non, elle est pas transitive.
P-Pourquoi?
E-Parce que 2 ne peut pas être en relation avec 1.
P- Ecris-moi ce que veut dire transitive
E-Oui, elle est transitive
P-Prouve-moi-le
E-Elle est transitive parce que x est en relation avec y, y est relation avec z alors x est en relation avec z
P- Ecris-le , là, est-ce que c'est vrai çà?
E-1R2, 2R3 alors 1R3
P-Je ne sais pas ce que çà veut dire.
Ecris-moi quelque chose que je connaisse.
E- $1 \leq 2$
P-Tu vois qu'on a bien:...puisque $1 \leq 2, 2 \leq 3$ *, on a bien* $1 \leq 3$ *et tu pouvais le faire sur chaque élément de E. Si un élément de E, par exemple a, est en relation avec b,* $a \leq b$*, b en relation avec c,* $b \leq c$*, on a bien que* $a \leq b \leq c$ *donc elle est transitive.*
Et maintenant, qu'est-ce qui manque à démontrer?
E- Elle est antisymétrique aussi.
P-Prouve-moi-le.
E- $1 \leq 2$ ...(un temps)
P- Réfléchis bien, rappelle-moi la définition de l'antisymétrie.
E-a est en relation avec b, b est en relation avec a, alors a égale b.
P- Bon, alors tu essaies de trouver deux éléments tels que a soit en relation avec b, b en relation avec a et essaies de voir si, ce a et ce b, c'est pas le même élément
E- 1 est inférieur ou égal à 2, mais 2 n'est pas inférieur ou égal à 1 donc la relation n'est pas antisymétrique.
Remous divers dans la classe
P-Tu crois?
Attendez. *Qui c'est qui a une bonne réponse, là?-Tu écouteras bien, hein.*
E''- $1 \leq 1$ *et* $1 \leq 1$ *donc* $1 = 1$.
P- Voilà! Tu as compris? On prend un élément de E, par exemple 1, on a bien $1 \leq 1$*, maintenant cet 1 là est bien inférieur ou égal à cet 1 là et on a bien* $1 = 1$ *donc la relation R est antisymétrique. Et qu'est-ce que tu peux dire de cette relation R?*
E- C'est une relation d'ordre.
P-Donc R est une relation d'ordre. Ca va? Vous avez bien compris?
Silence(approbateur??) des élèves, puis l'élève interrogé retourne à sa place et la leçon continue.

ANNEXE 2

Rappels: Un nombre pair est un entier naturel multiple de 2 (exemples 2; 4; 28; 658; ...). On rappelle que 0 est un nombre pair.
Le successeur d'un nombre entier n est le nombre entier (n + 1). Par exemple, 40 est le successeur de 39.
Soient un entier naturel n et tous les chiffres qui servent à l'écrire (en base dix). On considère ces chiffres comme des nombres et on en fait la somme (respectivement le produit) que l'on appelle pour simplifier «la somme des chiffres de n» (respectivement «le produit des chiffres de n»).
Par exemple, pour n = 166, la somme des chiffres de n est égale à 13 et le produit des chiffres de n est égal à 36.

Définition: On dira que n est intéressant si la somme de ses chiffres est paire et le produit de ses chiffres est impair.
Exemples: 35 et 99 sont intéressants. 40 et 425 ne sont pas intéressants (on dira aussi "non-intéressants").

1°) donner:
deux exemples de nombres intéressants: ***198 226***
deux exemples de nombres non-intéressants: ***22 3***

2°) Sans employer les mots "intéressant" et "non-intéressant", écrire une phrase équivalente à: "n est non-intéressant":
La somme des chiffres de n n'est pas paire ou
Le produit des chiffres de n n'est pas impair

Note: ***Dans les questions 3°) et 4°),*** **vous entourerez** ***la lettre correspondant à votre réponse pour chaque phrase proposée.***

3°) Pour chacun des nombres x, y et z, compte tenu des renseignements qui seront donnés à son sujet, dites s'il est intéressant (réponse O), non-intéressant (réponse N), ou s'il est impossible de le savoir

(réponse I) puis justifiez votre réponse:

a) Le produit des chiffres de x est impair.
x est-il intéressant?: O N I

Justification:
On ne connait pas le nombre de chiffres composant x.
- *Supposons que x ait un chiffre ⇒ ce chiffre est impair, il est possible que x soit non-intéressant.*
- *Mais il est aussi possible que x soit intéressant: contre-exemple = 6.*
- *Même chose si on suppose que x ait deux chiffres ou que x ait trois chiffres...*

b) y + 1 est intéressant. y est-il intéressant? O N I

Justification:
y + 1 intéressant signifie la somme des chiffres de y + 1 est paire
et
le produit des chiffres de y + 1 est impair

donc

la somme des chiffres de y est impaire
le produit des chiffres de y est pair
⇒ y est non intéressant

c) z est multiple de 9. z est-il intéressant? O N I

Justification:
z est multiple de 9 donc aussi multiple de 3
Il en suit que pour les multiples de 3, la somme de leur chiffre est impaire [est non paire]

4°) On suppose maintenant que m, n et p sont intéressants. Dites pour chacune des phrases suivantes si elle est vraie (réponse V), fausse (réponse F) ou s'il est impossible de le savoir (réponse I), puis justifiez votre réponse.

a) phrase: Le produit des chiffres de m est impair. V F I

Justification:
Pour supposition, m est intéressant
Ce qui signifie que la somme des chiffres est paire
et
le produit des chiffres est impair

b) phrase: n + 1 est intéressant V F I

Justification:
Même type de justification qu'à la question 3°) b)

c) phrase: p est multiple de 9 V F I

Justification: *on ne connait pas le nombre de chiffres composant p*

5°) Pour chacune des deux affirmations suivantes (voir au verso), dites si vous êtes *d'accord / hésitant / pas d'accord* (en cochant la case correspondante) et justifiez votre réponse en donnant les raisons pour lesquelles vous avez coché cette case.

a) Un multiple de 9 n'est jamais intéressant.

Vous êtes: - d'accord [X] - hésitant [ ] - pas d'accord [ ]

POURQUOI?
Même raisonnement qu'au 3°) c)
mais dans ce cas, j'aurais du Faux à 4°) c)

b) Le successeur d'un nombre intéressant n'est jamais intéressant.

Vous êtes: - d'accord [X] - hésitant [ ] - pas d'accord [ ]

POURQUOI?
Même raisonnement qu'au 3°) b)

6°) Voici deux raisonnements. Pour chacun d'eux, dites si vous êtes: *d'accord / hésitant / pas d'accord /* (en cochant la case correspondante), puis justifiez votre réponse en donnant les raisons pour lesquelles vous avez coché cette case.

Raisonnement 1:
Soit un nombre intéressant quelconque, par exemple 37, 37 est impair (comme tout nombre intéressant), donc son successeur 38 est pair et le produit de ses chiffres est pair (3 x 8 = 24). Par conséquent 38 n'est pas intéressant donc le successeur d'un nombre intéressant n'est jamais intéressant.

Vous êtes: - d'accord [ ] - hésitant [ ] - pas d'accord [X]

POURQUOI?

Comment peut-on affirmer que tout nombre intéressant est impair. Voici un contre-exemple: 9 9 est impair et ce n'est pas un nombre intéressant.

Raisonnement 2:

Soit n un multiple de 9. On a donc n = 9 x k avec k entier naturel. Or 9 n'est pas intéressant. Par conséquant n ne sara jamais intéressant.

Vous étes: - d'accord [ ] - hésitant [ ] - pas d'accord [X]

POURQUOI?

Il n'y a pas d'hypothèse qui nous dit que 9 n'est pas intéressant.

7°) Combien y a-t-il de nombres intéressants entre 10 et 99 (bornes comprises)?: ....

Justifier votre réponse: