Estratto da

M. Barra e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 5, Roma 6-9 aprile 1988.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

LOGICA E...

RUGGERO FERRO
Università di Padova

Dopo tre giorni di lavori mi pare che stia emergendo una difficolta': parliamo di logica, ma spesso con questo nome si intendono cose diverse. Io prendero' il coraggio a quattro mani e cerchero' di dire almeno cosa intendo io per logica, meglio, per logica matematica (ma diro' logica per brevita'). Con cio' so che deludero' ancora molte aspettative di indicazioni didattiche concrete, emerse anche in questi giorni, ma credo che non si possano affrontare correttamente questi temi senza aver precedentemente precisato cosa intendiamo per logica. Certamente, anche a causa del tempo limitato, non saro' esaustivo, ma cerchero' di cogliere quelli che penso siano i caratteri principali della logica, quasi attraverso slogans.

L'esigenza di chiarire cosa si intende per logica mi viene anche dall'aver notato, nella mia limitata esperienza, aspettative e posizioni da parte di certi insegnanti che mi hanno lasciato abbastanza perplesso. Ad esempio molti si attendono dall'introduzione della logica come materia scolastica un miglioramento della capacita' di ragionare da parte degli studenti.

Percio' il primo slogan che vorrei lanciare e' che "la logica non e' arte del ragionare", non e' capacita' di ragionare correttamente. Detto altrimenti, cio' che intendo con la parola logica non e' l'arte del ragionare, ne' ritengo che questo sia il significato opportuno da dare alla parola logica.

E' pur vero che inizialmente, ed anche tutt'ora, studiare come si ragiona e' stata una delle motivazioni di questa scienza chiamata logica; ma c'e' una profonda differenza tra lo studio di un fenomeno ed il fenomeno stesso, differenza che, nel nostro caso, puo' essere sottolineata dalla seguente osservazione. Se non ci fosse alcuna differenza e la logica fosse esattamente l'arte del ragionare, cioe' se l'arte del ragionare coincidesse con lo studio, la conoscenza, di come si ragiona, allora la conoscenza di come si ragiona sarebbe irragionevole: se essa servisse per saper ragionare in base a quali ragionamenti, che non conosciamo ancora senza la logica, potremmo affermare la sua significativita', la sua correttezza? Dobbiamo conoscere prima la logica, cioe' cosa vuol dire ragionare, oppure saper ragionare?

Allora c'e' una differenza, e sembrerebbe emergere l'idea che la logica non e' tanto la capacita' di ragionare, quanto lo studio su come si ragiona, il tentativo di rispondere alla domanda "cosa vuol dire ragionare?"

Ma anche questa posizione diviene problematica non appena si consideri la citazione da Thom: "per imparare a camminare sarebbe piu' nocivo che utile conoscere l'anatomia della gamba". Per ragionare ci serve conoscere come si ragiona?

L'affermazione di Thom puo' lasciare perplessi, ma considererei come una buona replica la citazione da Freudenthal: "compiere coscientemente l'azione del camminare non vuol dire conoscere l'anatomia della gamba, ma sapere che si sta camminando". Questa posizione puo' essere anche illustrata da quest'altra semplice analogia. E' importante sapere far di conto, ma e' altrettanto importante, forse ancor di piu', essere coscienti della correttezza dei conti, perche' i conti errati sono inutili. Cosi l'aritmetica non e' tanto la conoscenza dei numeri e la capacita' di far di conto, ma la conoscenza cosciente, la consapevolezza delle proprieta' dei numeri per poter fare comodamente e correttamente i conti. E' entrato in gioco un nuovo punto essenziale: la consapevolezza. Fuori dell'analogia, forse e' proprio questa conoscenza cosciente del ragionare che puo' giustificare l'opportunita' dello studio della

logica, cioe' dello studio di come si ragiona.

Ma appena ci addentriamo in questo studio, ci accorgiamo subito quanto sia ancora vaga la parola ragionare. Quando ragioniamo consideriamo certi fatti, certe cose, certe situazioni e le evntuali connessioni tra loro. Ma quando parliamo di consapevolezza del ragionamento svolto ci riferiamo piuttosto alla consapevolezza delle affermazioni che si fanno su quei fatti, su quelle cose, su quelle situazioni, su quelle connessioni.

Quest'ultima distinzione tra fatti ed affermazioni che si fanno su di essi sarebbe superflua se tra i due campi ci fosse sempre una perfetta corrispondenza. Mi sento di affermare che nei ragazzi, in quanto rappresentanti di coloro che ancora non hanno affinato le loro osservazioni in materia, c'e' una costante identificazione tra un fatto e la sua descrizione.

Ma proprio lo sviluppo della logica ci indica l'impossibilita' di una identificazione tra cio' che si vorrebbe significare e l'espressione, lo strumento linguistico rigoroso che si intende usare. Infatti ci sono concetti quali finito, infinito (per menzionare i piu' semplici!) che non possono essere

precisati, neppure a meno di isomorfismi, in alcun linguaggio formale, cioe' in alcun linguaggio del quale si sa esattamente come e' fatto (risultato di non categoricita' delle strutture infinite nelle logiche del primo ordine).

Percio' anche la proposta di considerare la logica come lo studio consapevole di come si ragiona incontra delle difficolta' che ci costringono a proporre in maniera piu' adeguata cosa intendiamo per logica. In questo concetto piu' adeguato di logica dovra' entrare in modo essenziale il linguaggio, meglio un linguaggio ben precisabile, un linguaggio formale.

Qui viene a proposito un altro slogan che farei risalire a C.C. Chang: logica e' algebra piu' linguaggio. Naturalmente questa affermazione soffre di tutti i limiti di uno slogan, ma cerchero' di analizzare piu' dettagliatamente cio' che vuol dire, e ne emergera' una notevole ragionevolezza della proposta.

Qui algebra sta ad indicare le strutture astratte, non solo algebriche anche se queste costituiscono un caso paradigmatico. D'altra parte per linguaggio intenderemo un modo preciso per indicare enti e relazioni della struttura e per fare affermazioni (= enunciati o veri o falsi) su di essi: cio' viene chiamato un linguaggio formale.

Togliendo un po' di schematicita' dallo slogan, potremmo riformularlo cosi: la logica e' l'analisi delle potenzialita' e dei limiti che il linguaggio pone allo studio di strutture astratte.

Vedete che siamo abbastanza lontani dalle proposte iniziali su cosa intendere per logica, lontani dall'arte del ragionare, ed anche da quello studio del ragionamento che poteva essere un desiderio e una posizione iniziale.

Ma, anche se abbiamo gia compiuto lunghi passi, c'e' ancora molto di non sufficientemente analizzato nella posizione raggiunta. Ad esempio, per il linguaggio, cosa vuol dire modo preciso di indicare? Vuol dire effettivo? Effettivo una volta concessi certi strumenti (logiche non del primo ordine)? E cosa vuol dire effettivo (ricorsivo od altro)? E per le strutture,

partiamo da una definizione di struttura astratta, per proseguire ad indagare sulla nozione di insieme con tutte le sue problematiche?

Non voglio pero' perseguire questa via perche' penso che, se bene inteso,

lo slogan di Chang colga il punto con precisione sufficiente, almeno per le conseguenze a cui mi interessa arrivare.

Ma prima di arrivare alle conseguenze, lasciatemi spendere ancora qualche parola sulla necessita' di distinguere tra l'espressione linguistica e il suo significato, distinzione che ritengo importante.

Spesso questa distinzione viene sottovalutata forse perche' in certi casi non vi e' alcun motivo di evidenziarla.

In situazioni molto semplici, situazioni in cui ci siano due, tre oggetti e le relazioni tra loro siano al massimo binarie, con il linguaggio si riesce a descrivere esattamente tutta la struttura di cui vogliamo parlare, e non c'e' problema ad identificare gli individui e le relazioni con le espressioni linguistiche che li individuano.

Ma le cose cambiano quando consideriamo situazioni piu' complesse, e

di casi complessi ce ne sono nella vita quotidiana. Gli oggetti non siano piu' quei tre quattro, ma qualche migliaio, e le relazioni tra essi considerate siano un numero finito ma grande. In teoria non c'e' alcuna differenza con la situazione precedentemente considerata: entrambe le strutture da descrivere sono finite e si riesce ancora a descrivere esattamente l'intera nuova struttura mediante il linguaggio, ma, per fare cio', le espressioni linguistiche divengono ben presto cosi' lunghe e numerose da essere praticamente intrattabili. Per superare questa difficolta' si mettono in risalto gli aspetti essenziali (quali?) della struttura, il linguaggio naturale diventa vago, impreciso. Per mantenere la precisione e la leggibilita' dobbiamo far ricorso ad affermazioni in un linguaggio formale ben organizzato in cui non essenziali sono le informazioni che si ottengono da affermazioni che si possono dedurre, e si dedurranno da altre, essenziali, e queste (gli assiomi) restano a caratterizzare la struttura.

Ma non e' facile scegliere gli assiomi. Abbiamo preso abbastanza espressioni da caratterizzare la struttura? Ne abbiamo prese troppe includendo alcune non essenziali? Si possono sciegliere in modo che il loro numero sia minimo, se c'e' un minimo? (c'e'!)

Ma lasciamo queste domande senza risposta per passare a situazioni in qualche modo ancora piu' difficili. Non piu' situazioni finite, concrete, ma situazioni astratte, ideali, infinite, e i numeri naturali possono essere considerati il paradigma di questo caso.

Direi che i numeri naturali sorgono dalla nostra possibilita' di comunicare solo una cosa alla volta, una cosa dopo l'altra ordinatamente nel tempo. Riassumerei questo dicendo che i numeri naturali rappresentano una organizzazione della nostra mente. Essi non sono oggetti concreti di cui possiamo verificare sperimentalmente tutte le proprieta', anche perche', essendo infiniti, non termineremmo mai la nostra verifica.

Torna qui l'esigenza di cogliere solo gli aspetti principali della struttura mediante affermazioni essenziali (assiomi) non tanto perche' sarebbe troppo complesso e laborioso coglierle tutte, ma perche' non e' possibile fare altrimenti essendo queste infinite. Tornano i problemi della sufficienza delle affermazioni prese come essenziali a caratterizzare la struttura intesa. Ma si aggiungono i problemi della correttezza delle affermazioni scelte: infatti alcune delle affermazioni essenziali scelte dovranno esprimere caratteristiche di tutti i numeri e non possiamo essere sicuri della correttezza di queste affermazioni perche' cio' richiederebbe una verifica infinita. Allora le affermazioni essenziali scelte, piu' che affermazioni vere degli oggetti che stiamo considerando, sono affermazioni che noi auspichiamo, che ci farebbe comodo che fossero vere dei numeri naturali, ma della cui verita' non siamo proprio sicuri.

Quante volte non auspichiamo situazioni cosi' comode ed ideali da essere impossibili! Allora dobbiamo almeno garantirci che le affermazioni fatte non si contraddicano tra loro. Poiche' stiamo considerando gli assiomi, cioe' le affermazioni essenziali, puo' capitare tanto piu' facilmente che queste affermazioni si contraddicano tra loro in quanto non e' sufficiente verificare che cio' che viene esplicitamente affermato in un assioma non sia la negazione di quanto e' affermato in un altro assioma, ma bisogna verificare che tutto cio' che si puo' dedurre dagli assiomi, e che e' sintetizzato negli assiomi stessi, non presenti contraddizioni.

Ma il problema della non contraddittorieta' diverrebbe insignificante se, dato un sistema di assiomi, noi potessimo visualizzare immediatamente tutte le affermazioni che si possono dedurre da quegli assiomi ed accorgerci subito se si possono dedurre sia una affermazione che la sua negazione. Ma, a meno che gli assiomi e le affermazioni deducibili siano in numero finito (ed anche molto limitato) detta condizione non e' umanamente soddisfacibile.

Cosi' ci rendiamo conto che la problematica sulla non contraddittorieta', sulla consistenza, trova la sua ragione d'essere nei limiti umani e piu' precisamente nella fintezza delle informazioni che si possono gestire. Se non ci fossero tali limiti umani, le definizioni e le deduzioni sarebbero del tutto inutili.

Qui torna a proposito la citazione da Cartesio: "La deduzione della pura illazione di una cosa da un'altra puo' certo essere omessa se sembra opportuno; anche la mente piu' limitata nel ragionamento non

puo' attuarla male. Di scarso valore mi sembrano percio' le concatenazioni mediante le quali i logici immaginano di riuscire a controllare il pensiero umano."

Su questa affermazione di Cartesio io sarei perfettamente d'accordo se potessimo concedere all' intelletto umano una capacita' illimitata di visualizzazione simultanea delle possibili affermazioni. Direi che il valore del calcolo logico, il valore della deduzione, si evidenzia proprio nel momento in cui ci rendiamo conto dei limiti umani.

Una volta visti ed accettati i limiti umani, si tratta di vedere come fare per ottenere quanto piu' possibile, cioe' per ottenere una gestione sempre migliore delle informazioni. Naturalmente una buona gestione e' una che e' bene organizzata, che sa archiviare nel modo piu' compatto possibile le informazioni, ed e' in grado di richiamarle in modo efficiente e preciso. Le informazioni si esprimono in un opportuno linguaggio, ed e' importante saper riconoscere quando delle espressioni sono vere in tutti i casi in cui altre sono vere, perche' allora e' sufficiente archiviare le seconde che' tanto le prime possono essere recuperate al momento opportuno mediante un opportuno calcolo logico. Si noti pero' che non e' detto che il recuperare delle informazioni attraverso il calcolo logico sia sempre semplice banale, proprio per i limiti prima osservati.

La logica intende studiare questa organizzazione delle espressioni e delle affermazioni indipendentemente dal loro contenuto informativo. Cosi' la singola informazione diventa un ente variabile che ha un nome e le varie affermazioni vengono legate tra loro mediante gli elementi organizzativi della logica, cioe' mediante i connettivi, i quantificatori ed eventuali operatori che diventano le costanti della logica. Allora la logica si presenta come lo studio della organizzazione delle affermazioni, non e' l'organizzazione, ma si pone ad un livello piu' astratto di questa: prende l'organizzazione delle affermazioni come suo oggetto di studio.

Per rendere lo studio preciso, matematico, anche l'oggetto di studio deve essere individuato con precisione. Ecco che allora il linguaggio non puo' essere un qualcosa di non ben definito com'e' il linguaggio naturale che, evolvendosi, non permette neppure di dire quali sono le sua parole. Cosi' dobbiamo far ricorso ad un linguaggio artificiale, appositamente costruito, ad un linguaggio formale. La formalizzazione del linguaggio non e' la logica, ma solo la precisazione dell'oggetto su cui si svolgeranno le indagini della logica.

Nello studio di una organizzazione gli ovvi problemi che si vogliono affrontare sono quelli della efficienza e dell'ambito di applicabilita', e questi problemi sono sostanzialmente anche i problemi centrali della logica.

Dunque la logica torna ad essere lo studio delle potenzialita' e dei limiti del linguaggio nel rappresentare strutture astratte, potenzialita' e limiti che si esprimono attraverso ben precisi teoremi ora che il linguaggio e' stato adeguatamente formalizzato, matematizzato.

Qui concluderei questo mio tentativo di dare una prima approssimazione di cosa penso sia opportuno intendere con la parola logica. Mi fermo qui perche' penso che da qui possano gia' partire delle indicazioni sul ruolo e sull'utilizzo della logica nell'insegnamento ed in particolare nella didattica della matematica.

La logica permettera' di essere coscienti dei legami tra le espressioni del linguaggio, anche di quello naturale in quanto approssimato da quello formale, e cosi' eventualmente correggere modi impropri di esprimere il ragionamento, ma non insegnera' a ragionare piu' di qualsiasi altra materia che richieda l'esercizio della ragione.

E vorrei richiamare ancora i limiti del linguaggio nel precisare le strutture, limiti ben evidenziati dalla logica, perche' mi pare che non molti siano coscienti di questo punto che ha anche forti conseguenze didattiche. Infatti come si puo' pretendere che gli allievi non abbiano difficolta' ad apprendere nozioni (ad esempio di collezione dei numeri naturali, di continuita', ecc.) che non si possono precisare con un linguaggio preciso, formale?

La logica potra' allora essere, forse principalmente, uno strumento in mano all'insegnante per individuare le difficolta' in cui si trova l'allievo.

Il tema di questa tavola rotonda e': "Logica e ...". Purtroppo, come il moderatore fa ben capire, il mio tempo e abbondantementte esaurito, e non posso addentrarmi in considerazioni di collegamento tra la logica ed altre discipline vicine. Tuttavia ritengo che la puntualizzazione che ho cercato di proporre del concetto di logica si imponesse per aver chiaro almeno uno dei termini di confronto.