Estratto da

M. Barra e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 5, Roma 6-9 aprile 1988.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

SULLA DIDATTICA PRE-UNIVERSITARIA DEI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

MASSIMO CLAVELLI
Università di Cassino

Quanto segue vuol essere soprattutto una segnalazione di problematiche, presenti in una letteratura assai specialistica (cfr. ad esempio [1] e i lavori in esso citati) sviluppatasi nell'ambiente scientifico della Scuola Normale Superiore di Pisa e a cui anch'io ho dato il mio contributo, che possono essere rilevanti nella didattica preuniversitaria dei fondamenti della matematica.

E' mio intento illustrare le motivazioni di questo filone specialistico e le critiche che esso muove a livello scientifico ad una fondazione della matematica puramente insiemistica, facendo rilevare altresì le ulteriori obiezioni che si possono opporre quando questa fondazione della matematica puramente insiemistica viene traslata nella didattica preuniversitaria.

Intendo inoltre accennare sinteticamente a ciò che propone in positivo questo filone specialistico e al modo in cui si potrebbero trasporre questi contenuti nella didattica preuniversitaria, rimandando comunque ad [1] chi volesse studiare più approfonditamente queste problematiche in vista dell'elaborazione di programmi di aggiornamento per gli insegnanti, di progetti di sperimentazione didattica o di proposte di modifica dei programmi ministeriali.

L'intuizione e il ragionamento del matematico non si basa in realtà sul solo concetto fondamentale di insieme, ma anche su quelli di coppia, n-upla, funzione, operazione, relazione, qualità, numero reale, ecc.

In questo ultimo secolo c'è stata una tendenza a codificare tutti questi concetti in teorie di tipo esclusivamente insiemistico, queste codifiche risultano innaturali (forse anche inutilmente complicate) e non sono entrate nella pratica concreta dei matematici.

Quindi i fondamenti della matematica e la pratica matematica finiscono per risultare poco correlate, mentre la formulazione dei concetti in un modo che non corrisponde all'intuizione può rendere più difficile la risoluzione di problemi complicati (una congettura in tal senso è stata formulata da E. De Giorgi riguardo ad alcuni problemi di gamma-convergenza astratta collegati con questioni fondazionali) .

Le codifiche risultano poi particolarmente innaturali, quando si ha a che fare con concetti intensionali (cioè non estensionali : due oggetti possono essere diversi anche se da un punto di vista fenomenologico sono collegati con gli altri oggetti nello stesso modo)

I concetti intensionali, in particolare quello di operazione e di programma, stanno conoscendo un particolare sviluppo soprattutto nell'informatica (per esempio è perfettamente naturale considerare diversi due programmi che a parità di imput danno le stesse risposte, ognuno dei due può essere più veloce in certi casi e più lento in altri, o più adatto a girare su certe macchine e meno adatto a girare su certe altre, o occupare più o meno memoria dell'altro) .

Va comunque detto che i concetti intensionali sono comunque radicati nell'intuizione matematica e sono stati pertanto ingiustamente sacrificati nella formalizzazione dei fondamenti della matematica. (si pensi per esempio quando si individua in un contesto una classe di oggetti mediante una proprietà espressa da una formula, in determinati contesti formule diverse possono essere associate alla stessa classe di oggetti, ma non per questo sono la stessa formula!)

Va poi detto che funzioni od operazioni (o anche oggetti di altro tipo, per esempio proprietà) che sono definite su se stesse sono oggetti matematicamente più che legittimi (si pensi ancora una volta per esempio all'informatica, in particolare a programmi "autoreferenziali" del tipo del "lisp" o simili) e che nell'attuale fondazione della matematica, secondo le codifiche e le conseguenti definizioni che vengono date, per l'assioma di regolarità, non possono esistere.

Per quanto riguarda poi la didattica preuniversitaria le complicate codifiche che potevano avere un senso a livello scientifico, in quanto permettevano, in una prospettiva riduzionista della matematica, di utilizzare un solo concetto fondamentale, cessano di averlo in quanto non possono essere comprese dagli studenti e comunque non è possibile presentare non solo le dimostrazioni, ma anche l'enunciato dei teoremi che le rendono, sia pur da un punto di vista molto parziale, interessanti.

Gia alle scuole elementari, quando si introduce il concetto di insieme, si potrà introdurre anche il similare concetto di qualità, cercando di mettere in rilievo, almeno da un punto di vista intuitivo, la differenza tra oggetti estensionali ed oggetti intensionali.

Al momento che si riterrà più opportuno, nelle scuole medie (inferiori o superiori), quando si riterrà che gli alunni abbiano la necessaria maturità perchè si possa parlare dei fondamenti della matematica, oltre all'introduzione del concetto di insieme e delle operazioni ad esso collegate (unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano, ecc.) , si potranno trattare in modo analogo gli altri concetti fondamentali della matematica.

Si potrà introdurre il concetto di coppia, come un oggetto di natura estensionale che ha un primo elemento ed un secondo elemento, ed eventualmente generalizzarlo introducendo anche i concetti di terna, quadrupla ed eventualmente n-upla .

Si potranno introdurre i concetti di funzione (concetto estensionale) ed operazione (concetto intensionale), intesi come oggetti che a certi oggetti associano altri oggetti, unitamente alle operazioni fondamentali ad essi correlate (restrizione del dominio, rincollamento, prodotto fibrato, ecc.)

Per prodotto fibrato di due funzioni f,g intendo la funzione h tale che h(x)=(f(x),g(x)) e il primo membro dell'uguaglianza è definito se e solo se è definito il secondo membro.

Si potrà introdurre il concetto di relazione e le restrizioni unilatere (destre e sinistre) e bilatere.

Si potrà introdurre il concetto di qualità (concetto intensionale) unitamente alla congiunzione di qualità.

Eventualmente si potrà presentare il paragrafo 1 del primo capitolo di [1] (ovviamente in una appropriata formulazione didattica) che costituisce una delle novità più interessanti di [1]

Nel capitolo 1 di [1] vengono trattati alcuni concetti usati nella descrizione delle strutture matematiche (coppie, qualità, relazioni ed operazioni) dandone una preliminare assiomatizzazione fortemente autoreferenziale.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

[1] M.Clavelli-E.De Giorgi-M.Forti-V.M.Tortorelli "A self-reference oriented theory for the foundation of Mathematics" Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa n° 194 , maggio 1987 ; apparirà sul volume in memoria del matematico francese Lions.

Per ulteriori riferimenti bibliografici vedere [1] , su cui sono citati 22 articoli attinenti all'argomento in questione.