

Estratto da

Atti degli incontri di logica matematica Volume 6, Siena 28-31 maggio 1989.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

METODI ALGEBRICI IN LOGICA MODALE

Fabio Bellissima-Siena

Questa nota costituisce una rassegna di risultati di Logica Modale relativi ad argomenti "classici" nella letteratura di tale disciplina: I) Modalita' non equivalenti, II) Numeri di Post, III) Assiomatizzazione di classi di strutture. Questi risultati non sono relativi a specifiche logiche modali, ma sono riferiti all'intero reticolo delle logiche modali normali (I e II), o al reticolo delle estensioni di $K4$ (III).

L'elemento che accomuna i teoremi presentati e' costituito dalle metodologie usate: le dimostrazioni infatti si basano, piu' o meno direttamente, su proprieta' strutturali di quelli che Kit Fine chiama Modelli Canonici Deboli. Tali modelli altro non sono che i duali delle algebre modali libere su un numero finito di generatori. La definizione di Modello n -canonico di L (con $n \in \omega$) e' analoga a quella standard di Modello Canonico di L , considerando, in luogo delle estensioni massimali consistenti di L , le intersezioni di tali estensioni con l'insieme delle n -formule, cioe' delle formule in cui non compaiono variabili con indice maggiore o uguale ad n . In analogia con il cosiddetto Teorema Fondamentale della logica modale, vale il seguente risultato: una n -formula e' teorema di una logica L sse vale nel suo modello n -canonico. Ovviamente, la definizione dei modelli n -canonici non e' costruttiva; un

uso efficace di tali strutture richiede una conoscenza piu' profonda delle loro proprieta', ottenibile mediante la costruzione effettiva di loro sottostrutture significative (vedi [Fi1] e [Be1]).

I) MODALITA' NON EQUIVALENTI.

Una modalita' e' una stringa di operatori modali; la letteratura al riguardo e' vasta, e l'insieme delle modalita' non equivalenti relative alle piu' note logiche modali e' stato determinato. Come osservato, i risultati che presentiamo non riguardano logiche specifiche. Pur non facendo cenno alcuno alle dimostrazioni (per queste si veda [BM]), e' facile mostrare come la soluzione di problemi sulle modalita' possa fondarsi sui modelli n -canonici; infatti l'equivalenza tra due modalita' e' una formula in una sola variabile, ed e' quindi teorema di una logica sse vale nel suo modello 1-canonico. Data una logica L , indichiamo con $J(L)$ la sua partizione modale, cioe' l'insieme delle classi di modalita' L -equivalenti (in simboli, $J(L) = \{[\varphi]_L : \varphi \in \text{Mod}\}$, dove Mod e' l'insieme delle modalita' e $[\varphi]_L = \{\psi \in \text{Mod} : L \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$). $|J(L)|$ esprime quindi il numero massimo delle modalita' a due a due non equivalenti. Poiche', nel caso delle logiche "storiche", ciascuna classe di $J(L)$ contiene una sola modalita' di lunghezza minima che e' inoltre sottomodalita' di tutte le altre ad essa equivalenti, la determinazione di $|J(L)|$ ha preso il nome di "ricerca delle modalita' irriducibili"; la

precedente proprieta' non vale pero' in generale. Si dimostra tuttavia che, per ogni L , e' possibile una scelta di rappresenanti delle classi di $J(L)$ le cui lunghezze non fanno salti, costituiscono cioe' un segmento iniziale di ω .

Naturalmente, logiche differenti possono avere lo stesso $J(L)$. Sorgono spontanee almeno tre domande: a) Quante sono le partizioni modali? b) Dato un cardinale α ($1 \leq \alpha \leq \aleph_0$), quante sono le logiche la cui partizione ha cardinalita' α ? Ed infine, quante le diverse partizioni di cardinalita' α ? Risposte:

$$a) |\{J(L) : K \subseteq L\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Questo risultato ammette una seconda lettura. Per ogni partizione modale esiste una logica minimale tra quelle che la generano, assiomatizzata mediante equivalenze tra modalita'. Poiche' tali formule sono esprimibili nel linguaggio $\{\{p_0\}, \neg, \Box, \equiv\}$, il precedente teorema asserisce che un continuo di logiche sono assiomatizzabili in tale linguaggio ridotto.

b) Indicando con $\lambda(\alpha)$ il numero di logiche la cui partizione ha α elementi, vale il seguente risultato: $\lambda(1)=1$, $\lambda(\alpha)=0$ se α e' dispari maggiore di 1, $\lambda(2)=1$, $\lambda(4)=3$, $\lambda(\alpha) \geq \aleph_0$ per α pari maggiore di 4, $\lambda(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

c) Indicando con $\pi(\alpha)$ il numero partizioni di cardinalita' α , si ha che $\pi(\alpha) < \aleph_0$ se $\alpha < \aleph_0$, $\pi(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

II) NUMERI DI POST.

Ricordiamo che un insieme di Post è un sottoinsieme proprio dell'insieme delle formule, contenente le tautologie, chiuso per sostituzione e massimale rispetto a queste proprietà. Data una logica L , il numero di Post di L ($p(L)$) è il numero degli insiemi di Post che includono L (ovviamente $1 \leq p(L) \leq 2^{\aleph_0}$). La connessione tra numeri di Post e modelli canonici deboli è stretta, in virtù del seguente Teorema di Makinson-Segerberg: $p(L)$ è uguale alla cardinalità del modello 0-canonico di L (cioè del modello canonico costruito mediante formule prive di variabili). I problemi relativi ai numeri di Post sono di due generi, a seconda che il punto di partenza sia costituito da una logica (data L , determinare $p(L)$), oppure da un numero (dato α , determinare $|\{L: p(L)=\alpha\}|$). La conoscenza dei modelli 0-canonici è ovviamente utile per la soluzione dei problemi del primo tipo; ed è mediante costruzione di particolari modelli 0-canonici che si è giunti al seguente teorema, conclusivo per i problemi del secondo tipo (vedi [Be3]):

$$|\{L: p(L)=\alpha\}| = 2^{\aleph_0}, \text{ per ogni } \alpha \text{ (} 1 \leq \alpha \leq 2^{\aleph_0} \text{)}.$$

III) ASSIOMATIZZABILITÀ DI CLASSI DI STRUTTURE.

Il problema di logica modale più trattato verte sul rapporto tra formule modali e proprietà relazionali delle strutture soddisfacenti tali formule. In una delle sue direzioni tale problema assume la seguente forma: data la classe X di tutte e sole le strutture la cui relazione soddisfa una proprietà J , trovare l'insieme di formula Γ

avente X come classe di strutture. Kit Fine in [Fi2] e l'autore in [Be3] hanno, indipendentemente, elaborato due metodi per assiomatizzare classi di strutture i quali hanno la caratteristica comune di spostare l'obiettivo della ricerca dalle formule alle strutture; si dimostra infatti che è possibile ottenere meccanicamente Γ qualora si siano individuate particolari strutture finite che caratterizzano (in modo che preciseremo tra poco) la classe X . In altri termini, lo sforzo non consiste più, come nei metodi standard, nello stabilire rapporti tra formule e strutture, ma diviene completamente semantico, volto ad individuare rapporti (di sottostruttura e di p -morfismo) tra strutture.

A) "Metodo delle sottostrutture" ([Fi2]).

I concetti su cui si fonda sono i seguenti: a) sottostruttura ($F' = \langle W', R' \rangle$ è sottostruttura di $F = \langle W, R \rangle$, in simboli $F' \subseteq F$, se $W' \subseteq W$ ed $R' = R/W'$); b) p -morfismo (definizione standard, in simboli $F \rightarrow F'$); c) sottoriduzione (F è sottoriducibile ad F' se esiste F'' tale che $F' \subseteq F$ e $F'' \rightarrow F'$).

Data una classe X di strutture, è necessario individuare una classe di strutture finite $Y = \{F_i: i \in I\}$ che soddisfi la seguente condizione:

$X = \{F: F \text{ non è sottoriducibile ad alcuna } F_i\}$.

A tal punto, per ogni F_i si costruisce in modo meccanico una formula φ_i , e la classe X è assiomatizzata da $\Gamma = \{\neg \varphi_i: i \in I\}$.

In [Fi2] si dimostra che ogni logica assiomatizzabile con il metodo della sottocornice ha la Proprietà del modello

finito. Inoltre la classe di tali logiche, avente la cardinalita' del continuo, comprende alcune tra le logiche piu' significative, quali S4, S5, S4.2, GL)

B) "Metodo della separazione finita" ([Be]).

Tale metodo e' stato pensato per le logiche intermedie, ma e' applicabile in ambito modale, in virtu' dei legami tra le rispettive semantiche. I concetti su cui si basa sono: a) sottostruttura generata ($F' = \langle W', R' \rangle$ e' sottostruttura generata di $F = \langle W, R \rangle$, in simboli $F' \in_+ F$, se $F' \in F$ e per ogni $\langle x, y \rangle \in R$, $x \in W'$ implica $y \in W'$); b) p-morfismo; c) g-sottoriduzione (F e' g-sottoriducibile ad F' se esiste F'' tale che $F' \in_+ F$ e $F'' \rightarrow F'$).

Data una classe X di strutture, e' necessario individuare una coppia di strutture A e B che soddisfino la seguente uguaglianza:

$X = \{F: \text{per ogni } F', \text{ se } F' \text{ e' g-sottoriducibile a } F \text{ ed } A, \text{ allora e' g-sottoriducibile a } B\}$.

Di nuovo, si costruiscono in modo meccanico due formule φ_A e φ_B tali che $\Gamma = \{\varphi_A, \varphi_B\}$ assiomatizza X .

Il principale punto di contatto di questo metodo con i modelli canonici deboli e' il seguente: φ_A e φ_B sono disgiunzioni di formule che "caratterizzano" punti di tali modelli. Come nel caso precedente, ogni logica la cui classe di strutture sia finitamente separabile ha la Proprieta' del modello finito. Osserviamo infine che la classe delle logiche assiomatizzabili per sottostruttura (metodo A) e quella delle logiche finitamente separabili (metodo B) sono

inconfrontabili: ad esempio, GL appartiene solo alla prima, K4D solo alla seconda.

Bibliografia.

[Be1] F.BELLISSIMA - Atoms in Modal Algebras, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 30 (1984), 303-312.

[Be2] F.BELLISSIMA - An effective representation for finitely generated free interior algebras, Algebra Universalis, 20 (1985), 302-317.

[Be3] F.BELLISSIMA - Finite and finitely separable intermediate propositional logics, JSL 53 (1988), 403-420.

[Be4] F.BELLISSIMA, Post Complete and 0-axiomatizable modal logics, Annals of Pure and Applied Logic, 47 (1990) 121-144.

[BM] F.BELLISSIMA-M.MIROLLI - A general treatment of equivalent modalities in normal modal logics, JSL 54 (1989), 1460-1471.

[Fi1] K.FINE, Logics containing K4 (Part 1), JSL 39(1974) 31-42.

[Fi2] K.FINE, Logics containing K4 (Part 2), JSL 50(1985) 619-651.