II Università di Roma
Tor Vergata

Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Problemi fondazionali in Teoria delle Categorie

Relatrice:
Prof.ssa Barbara Veit

Candidato:
Cesare Gallozzi

23 Luglio 2012

Sommario

Le importanti applicazioni della teoria delle categorie in matematica rendono di notevole interesse il problema della sua fondazione e della relazione con la teoria degli insiemi. L'approccio degli universi di Grothendieck, che per la sua semplicità tecnica è il più utilizzato, sarà il nostro oggetto di studio principale.
Non faremo alcun uso dell'assioma della scelta.

Indice

Capitolo 1

La teoria delle categorie

È ormai diffusa e consolidata, nella cultura matematica, l'idea di fondare lo scibile matematico sui concetti primitivi di insieme e di appartenenza di insiemi ad altri insiemi, nella cornice standard della teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZF) o in altre più esotiche teorie degli insiemi. Tuttavia quando si studiano certi oggetti matematici quali possono essere spazi topologici, gruppi o spazi di funzioni non importa davvero sapere quali sono gli elementi degli insiemi in considerazione quanto caratterizzare l'oggetto di studio a meno di isomorfismi. In particolare gli analisti preferiscono definire assiomaticamente i numeri reali come campo ordinato e completo piuttosto che costruirli a partire dai numeri naturali.
La teoria delle categorie coglie precisamente questo aspetto ponendo l'enfasi non sugli insiemi e i loro elementi, ma sulle strutture, che vengono definite implicitamente selezionando opportuni morfismi, da interpretare come trasformazioni o simmetrie della struttura considerata. Per queste caratteristiche la teoria delle categorie è ormai diventata uno strumento essenziale nella moderna geometria e topologia algebrica e il suo linguaggio permette spesso di sintetizzare in modo elegante concetti provenienti da aree apparentemente molto distanti della matematica.

La scoperta o l'invenzione (a seconda delle convinzioni filosofiche) della teoria delle categorie offre un interessante spunto per una riflessione sul rapporto tra forma e contenuto in matematica: oggi siamo tutti abituati ad indicare le funzioni come frecce $f : X \to Y$, tuttavia fino ad un periodo relativamente recente (1940-1941 nella prima apparizione) si usava scrivere $f(X) \subset Y$. È interessante notare come solo 4 anni dopo, nel 1945, sia apparso il famoso articolo di Eilenberg e Mac Lane che introdusse il concetto di categoria.
Sembra quindi che il denotare in modo diverso un concetto noto, quello di funzione, abbia aiutato a guardarlo sotto una luce diversa, cioè come una sorta di trasformazione, di scatola nera che dato un elemento ne produce un altro e che questa visione delle funzioni come enti "dinamici" abbia condotto

in brevissimo tempo al concetto di categoria, che della nozione di morfismo fa il suo cardine fondamentale.
Quella che può essere una semplice curiosità, ci mostra la sua importanza rammentandoci della stretta, feconda e inestinguibile interazione tra forma e contenuto in matematica. Se da un lato le idee e le intuizioni sono vuote chiacchiere senza un adeguato formalismo a sostenerle, così un sistema formale sprovvisto di interpretazioni costituisce uno sterile aggregato di simboli. Questi due opposti convivono e se sono quotidiani gli esempi di idee che stimolano la scrittura di nuovi formalismi, vi sono anche illustri esempi di sistemi di notazione che aiutano a pensare, non solo più chiaramente, ma in modo diverso concetti usuali, contribuendo a far nascere nuove e fertili teorie.

1.1 Il linguaggio categoriale

Seguendo [Mac97] diamo innanzitutto una definizione assiomatica di categoria, che oltre ad essere essenziale qualora si sia intenzionati a scegliere un approccio fondazionale che parta dalle categorie come oggetti matematici fondamentali, è anche molto utile per focalizzarsi su quelli che sono i costituenti fondamentali della teoria, cioè oggetti e morfismi.

Definizione 1.1.1
Un **metagrafo** consiste di due sorte: gli *oggetti* e i *morfismi* e di due funzioni dette *dominio* e *codominio* che ad ogni morfismo associano un oggetto, che denotiamo nel modo seguente: $a = \mathrm{dom} f$ e $b = \mathrm{cod}\ f$, più sinteticamente scriveremo $f : a \to b$

Definizione 1.1.2
Una **metacategoria** è un metagrafo con due ulteriori funzioni dette *identità* che ad ogni oggetto associa un morfismo $1_a : a \to a$ e *composizione* che ad ogni coppia ordinata (f, g) di morfismi con dom $g =$ cod f, detti **morfismi componibili** associa il morfismo $g \circ f$: dom $f \to$ cod g.
Composizione e identità soddisfano i seguenti assiomi:

- *Associatività*: per ogni a, b, c, d oggetti e comunque dati f, g, h morfismi tali che $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ si ha $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- *Identità*: per ogni f, g morfismi componibili con $f : a \to b$ e $g : b \to c$ si ha $1_b \circ f = f$ e $g \circ 1_b = g$

Diamo ora la definizione di categoria, che consisterà in un'interpretazione insiemistica degli assiomi di metacategoria.

Definizione 1.1.3
Chiameremo **grafo** una quaterna ordinata (A, O, dom, cod) dove A e O sono insiemi i cui elementi sono detti rispettivamente **morfismi** e **oggetti**, dom e cod funzioni $A \underset{\text{cod}}{\overset{\text{dom}}{\rightrightarrows}} O$.
Si definisce inoltre l'insieme dei **morfismi componibili**

$$A \times_O A := \{(f, g) \in A \times A | \ \text{dom} g = \text{cod} f\}$$

Definizione 1.1.4
Chiameremo **categoria** una sestupla ordinata (A, O, dom, cod, 1, $\circ$) dove (A, O, dom, cod) è un grafo e l'identità e la composizione sono funzioni $1 : O \to A \quad \circ : A \times_O A \to A$ che verificano le seguenti identità:

- $\text{dom}(1_a) = \text{a} = \text{cod}(1_a)$
- $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f$
- $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$

E in modo che valgano gli assiomi di identità e associatività enunciati nella definizione di metacategoria. Infine dati comunque a, b oggetti definiamo l'insieme $Hom(a, b) := \{f \in A | \ \text{dom} f = a, \text{cod} f = b\}$

L'approccio che si sceglie solitamente definendo il concetto di categoria in ambito insiemistico consiste nel definire gli insiemi Hom e lavorare con essi; si tratta senza dubbio della scelta più vicina alla consuetudine. Abbiamo scelto un approccio diverso che ha il pregio di mettere in luce le caratteristiche peculiari della teoria e soltanto in un secondo momento l'abbiamo posta in relazione con la teoria degli insiemi.
Osserviamo inoltre che per ogni oggetto il morfismo identità è univocamente determinato e che quindi avremmo potuto riformulare il linguaggio della teoria delle categorie in termini di soli morfismi, tuttavia manterremo la sorta degli oggetti distinta da quella dei morfismi in quanto questa distinzione consente di appoggiarsi maggiormente all'intuizione delle categorie concrete che si incontrano nella comune pratica matematica.

Definizione 1.1.5
Un morfismo $f : a \to b$ di una categoria si dice **isomorfismo** sse esiste un morfismo $g : b \to a$ tale che $f \circ g = 1_b$ e $g \circ f = 1_a$

Ora diamo la definizione di "morfismo di categorie" che sarà dato da una coppia di funzioni che rispettano la struttura categoriale.

Definizione 1.1.6
Chiamiamo **funtore** dalla categoria $(A, O, \text{dom}, \text{cod}, 1, \circ)$ alla categoria $(A', O', \text{dom}', \text{cod}', 1', \circ')$ una coppia di morfismi $F = (F_{Ob}, F_{Hom})$ con $F_{Ob} : O \to O' \qquad F_{Hom} : A \to A'$ tali che:

- $\text{dom}' F_{Hom}(f) = F_{Ob}(\text{dom} f)$
- $\text{cod}' F_{Hom}(f) = F_{Ob}(\text{cod} f)$
- $F_{Hom}(1_a) = 1'_{F_{Ob}(a)}$
- $F_{Hom}(g \circ f) = F_{Hom}(g) \circ' F_{Hom}(f)$ per ogni coppia di morfismi componibili

I funtori vengono anche detti **funtori covarianti**

Definizione 1.1.7
Un funtore $F = (F_{Ob}, F_{Hom})$ si dice:

- **suriettivo** sse F_{Ob} è suriettiva
- **iniettivo** sse F_{Ob} è iniettiva
- **pieno** sse F_{Hom} è suriettiva
- **fedele** sse F_{Hom} è iniettiva
- **conservativo** sse $F_{Hom}(f)$ isomorfismo implica f isomorfismo

Dati due funtori $A \xrightarrow{T} B \xrightarrow{S} C$ la coppia $(S_{Ob} \circ T_{Ob}, S_{Hom} \circ T_{Hom})$ definisce un funtore ottenuto per composizione, operazione che risulta banalmente associativa. Date due categorie definiamo nel modo ovvio il funtore costante e il funtore identità.

Nel seguito sottintenderemo sempre il pedice per i funtori lasciando al lettore il compito di distinguere a seconda del contesto se si tratta della componente del funtore sugli oggetti o di quella sui morfismi.
Scriveremo inoltre $a \in A$ intendendo $a \in Ob(A)$.

Definizione 1.1.8
Diremo che due categorie A e B sono **isomorfe** sse esistono due funtori $F : A \to B$ e $G : B \to A$ tali che le composizioni coincidano con i funtori identici

Definizione 1.1.9
Data una categoria $(A, O, \text{dom}, \text{cod}, 1, \circ)$ e (A', O') con $A' \subseteq A$ e $O' \subseteq O$ diciamo che la coppia (A', O') è **sottocategoria** della categoria data sse:

- $\forall f \in A' \quad \mathrm{dom} f, \mathrm{cod} f \in O'$
- $\forall a \in O' \quad 1_a \in A'$
- $\forall (f,g) \in A \times_O A \quad f \circ g \in A'$

Una sottocategoria si dice **piena**, rispettivamente **fedele** sse il funtore di inclusione canonicamente definito è pieno, rispettivamente fedele.

Questa definizione assicura che (A', O') con le operazioni dominio, codominio, identità e composizione ristretta ai sottoinsiemi A' e O' formi una categoria.
Ci apprestiamo ora a dare la definizione di "morfismo di funtori".

Definizione 1.1.10
Date due categorie (A, O) e (A', O') e due funtori $F, G : A \to A'$ chiameremo **trasformazione naturale** una funzione $\alpha : O \to A'$ data da $\alpha(c) = \alpha_c : \ Fc \to Gc$ in modo tale che per ogni $f : a \to b$ nella categoria (A, O) il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ Fb \arrow[r, "\alpha_b"'] & Gb \end{tikzcd}$$

In tal caso scriveremo $\alpha : F \to G$ e diremo che α è naturale nella variabile $c \in \ O$. Le funzioni α_c si dicono **componenti della trasformazione naturale**.
Una trasformazione naturale con tutte le componenti isomorfismi si dice **isomorfismo naturale** e si ha banalmente che la funzione $\beta : O' \to A$ avente per componenti le inverse delle componenti di α risulta essere anch'essa una trasformazione naturale.

In modo analogo a quanto osservato per i funtori, anche nel caso delle trasformazioni naturali la composizione di morfismi $\circ$ induce una composizione associativa tra trasformazioni naturali, che ammette elemento neutro (la trasformazione avente tutte le componenti identità).

Diamo ora alcune altre definizioni che ci serviranno nel seguito e che si discostano un poco dalle costruzioni standard lungo il filo conduttore categorie-funtori-trasformazioni naturali che abbiamo seguito fin'ora.

Definizione 1.1.11
Date due categorie A e B denoteremo con $Funct(A, B)$ la categoria dei funtori tra le due categorie i cui morfismi sono le trasformazioni naturali. Indicheremo con $Nat(F, G)$ gli insiemi Hom di tale categoria.

Definizione 1.1.12
Data una categoria A diciamo che suo un oggetto $a \in A$ è **iniziale** sse per ogni $b \in A$ esiste un unico morfismo $f : a \to b$.
Dualmente diciamo che a è **terminale** sse per ogni $b \in A$ esiste un unico morfismo $f : b \to a$

Definizione 1.1.13
Data una categoria C chiamiamo **categoria opposta**, che indichiamo con C^{op}, la categoria i cui oggetti sono gli stessi di C e i cui morfismi hanno dominio e codominio scambiati, formalmente ad ogni $f : a \to b$ in C associamo $f : b \to a$ in C^{op}

Definizione 1.1.14
Si dice **funtore controvariante** dalla categoria A alla categoria B un funtore $F : A^{op} \to B$.

1.2 I paradossi classici

Prima di dedicarci agli esempi di categorie, funtori e trasformazioni naturali ci soffermeremo su alcune costruzioni che con le definizioni da noi date non sono permesse, ma che sarebbe gradevole poter maneggiare; per fare ciò richiameremo i paradossi classici di Russell, Cantor e Burali-Forti e li reinterpreteremo in contesto categoriale.
Cominciamo dal paradosso di Russell che possiamo sintetizzare affermando che non esiste l'insieme $\mathfrak{R} := \{x \mid x \notin x\}$ infatti si ricava immediatamente:

$$\mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \iff \mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$$

che è un assurdo per il principio del terzo escluso. Questo risultato prende il nome di paradosso in quanto nel contesto della teoria ingenua degli insiemi si dava per scontato il cosiddetto *principio di comprensione* cioè che per ogni formula ϕ esistesse l'insieme $\{x \mid \phi(x)\}$, assunzione smentita dal risultato di Russell.

Definizione 1.2.1
Introduciamo la seguente notazione: dati A, B insiemi scriveremo:

- $A \hookrightarrow B$ per indicare una funzione iniettiva
- $A \twoheadrightarrow B$ per indicare una funzione suriettiva
- $A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ per indicare una funzione biettiva

Prima di dedicarci agli altri paradossi enunciamo il teorema di Cantor sull'insieme delle parti:

Teorema 1.2.1 (di Cantor)
$\forall X \quad \exists\, i : X \hookrightarrow \mathcal{P}(X) \quad \nexists j : X \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$
Informalmente possiamo dire che per ogni insieme la sua cardinalità è superata da quella del suo insieme delle parti.

Ora presentiamo il paradosso di Cantor che si può leggere dicendo che la totalità degli insiemi non forma un insieme.

Corollario 1.2.2
Non esiste l'insieme $\mathcal{U} := \{x \mid x \text{ è insieme}\}$

Dim. Se per assurdo esistesse avremmo anche l'iniezione $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathcal{U}$ e quindi per il teorema di Cantor-Bernstein avremmo una biezione tra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ e quindi un assurdo per il teorema precedente. □

Ricordiamo che un insieme si dice **transitivo** se e solo se ogni suo elemento è anche suo sottoinsieme.
Si dice **ordinale** un insieme transitivo ben ordinato dalla relazione di appartenenza $\in$.
Ricordiamo anche i seguenti risultati relativi agli ordinali [Appendice B]:

- ogni elemento di un ordinale è a sua volta un ordinale
- ogni insieme transitivo di ordinali è un ordinale
- dati due ordinali si ha uno e uno soltanto dei seguenti casi:

$$\alpha \in \beta \qquad \alpha = \beta \qquad \beta \in \alpha$$

Teorema 1.2.3 (di Burali-Forti)
Non esiste l'insieme $\mathcal{O} := \{x \mid x \text{ è ordinale}\}$

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse sarebbe transitivo in quanto ogni ordinale è insieme di ordinali e dunque essendo insieme transitivo di ordinali sarebbe esso stesso un ordinale. Avremmo $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ che è falso per ogni ordinale. □

1.3 L'approccio naïf

Con le definizioni date nella sezione precedente gli insiemi e le funzioni non formano una categoria, così come non lo sono gli ordinali con le funzioni mo-

notone, né gli spazi topologici con le funzioni continue, dato che possiamo dotare ogni insieme della topologia discreta rendendo ogni funzione continua. Tuttavia dato che la teoria perderebbe molto del suo interesse se non potesse trattare questi oggetti cercheremo di distinguere gli insiemi usuali, che chiameremo *insiemi piccoli*, da certi altri *insiemi grandi* anche detti *classi* che al momento ci limitiamo a presentare intuitivamente.
In questo momento i nostri problemi fondazionali consistono nel ridefinire opportunamente la nozione di categoria in modo da includere gli esempi citati prima, cercando il più possibile di avvicinarsi all'idea iniziale di studiare *tutti* gli insiemi, *tutti* i gruppi, etc. In particolare la strategia consisterà nel formalizzare opportunamente questa distinzione relativa alla "taglia" degli insiemi.
Chiameremo **categoria piccola** una categoria nel senso della definizione di cui sopra e **categoria larga** una categoria che abbia morfismi e oggetti dati da insiemi grandi; possiamo quindi reinterpretare i paradossi classici in termini categoriali affermando che le categorie degli insiemi, degli ordinali e degli spazi topologici sono larghe.

L'approccio naïf, che adotteremo per il momento allo scopo di presentare qualche altro risultato, consiste nel non preoccuparsi di questi problemi fondazionali dando per scontato di poter effettuare rigorosamente esattamente tutte le costruzioni che servono nella pratica. La scelta di ignorare i problemi è di sicuro poco lungimirante se si nutre della convinzione superficiale che i problemi fondazionali siano soltanto cavilli d'impiccio al lavoro quotidiano del matematico, ma per noi è soltanto un assunto provvisorio funzionale a scoprire eventuali applicazioni utili della nostra teoria per motivare con più forza l'esigenza di una sua fondazione rigorosa.
A tale scopo ci apprestiamo a presentare il lemma di Yoneda e nella sezione successiva qualche esempio delle applicazioni della teoria in altri ambiti della matematica.

Ora diamo qualche definizione in questo contesto informale; una volta che avremo definito rigorosamente i concetti pregiudiziali di insieme grande e piccolo, queste definizioni potranno essere usate liberamente.

Definizione 1.3.1
Chiameremo **localmente piccola** una categoria tale che per ogni $a, b \in O$ $Hom(a, b)$ sia un insieme piccolo.

Definizione 1.3.2
Denoteremo con Set la categoria (larga) degli insiemi piccoli e delle funzioni tra essi e con Cat la categoria (larga) delle categorie piccole e dei funtori tra queste categorie.

Definizione 1.3.3
Data una categoria localmente piccola A definiamo il **funtore Hom** come $Hom(a,-) : A \to \mathsf{Set}$ che ad ogni oggetto $b \in A$ associa l'insieme $Hom(a,b)$ e ad ogni morfismo $f : c \to d$ associa la funzione che agisce per composizione

$$Hom(a,f) : Hom(a,c) \to Hom(a,d)$$

$$g \mapsto f \circ g$$

Lemma 1.3.1 (di Yoneda)
Sia A una categoria localmente piccola, $F : A \to \mathsf{Set}$ un funtore e $a \in A$ un oggetto.
Allora esiste $Y_{F,a} : Nat(Hom_A(a,-), F) \cong Fa$ biezione che manda ogni trasformazione naturale α in $\alpha_a(1_a)$

Corollario 1.3.2
Per ogni $a, b \in A$ oggetti, ogni trasformazione naturale dal funtore $Hom_A(a,-)$ al funtore $Hom_A(b,-)$ è della forma $I(f)_s = Hom_A(h,-)$ per un'unico morfismo $h : a \to b$

Dim. Segue banalmente dal lemma di Yoneda una volta scelto $F = Hom_A(s,-)$ □

Osserviamo che quanto dimostrato sul lemma di Yoneda può essere dualizzato ottenendo gli analoghi risultati relativi a funtori controvarianti.

Definizione 1.3.4
Data C categoria localmente piccola definiamo il **funtore di Yoneda covariante** $Y : C \to Funct(C^{op}, \mathsf{Set})$ dato da:

$$a \mapsto Hom_C(-,a)$$

$$Hom_C(b,c) \ni h \mapsto Hom_C(-,h)$$

Analogamente definiamo il **funtore di Yoneda controvariante** Y'

Definizione 1.3.5
Sia A una categoria localmente piccola e $F : A \to \mathsf{Set}$ un funtore. Una **rappresentazione di** F è una coppia (r, ψ) con r oggetto di A e $\psi : Hom_A(r,-) \to F$ un isomorfismo naturale.
r si dice **oggetto rappresentante**.
Un funtore $F : A \to \mathsf{Set}$ si dice **rappresentabile** sse esiste una sua rappresentazione.

Osservazione 1.3.1
Data una rappresentazione di un funtore l'oggetto rappresentante è ben definito a meno di isomorfismi.
Infatti per il lemma di Yoneda i funtori di Yoneda sono pienamente fedeli quindi conservativi.

Osservazione 1.3.2
Il funtore di Yoneda covariante viene anche chiamato **immersione di Yoneda** trattandosi di un funtore pienamente fedele che consente di rappresentare ogni categoria localmente piccola come sottocategoria piena di un'opportuna categoria funtore.

1.4 Le categorie e la pratica matematica

Ora ci dedicheremo agli esempi e a vedere quali sono alcune applicazioni del linguaggio categoriale in geometria e topologia algebrica.

- **0** è la categoria vuota
- **1** è la categoria con un oggetto e un morfismo (l'identità)
- Ogni grafo (G, V) tale che ogni vertice abbia l'arco identità e per ogni coppia di archi vi sia anche l'arco composto è una categoria
- I monoidi possono essere interpretati come categorie formate da un solo oggetto (gli elementi del monoide sono i morfismi dell'oggetto in questione)
- I gruppi possono essere interpretati come categorie formate da un solo elemento in cui ogni morfismo è invertibile
- Gli elementi di un insieme parzialmente ordinato con le relazioni di ordine parziale formano una categoria

Definizione 1.4.1
Ora mostriamo qualche altro esempio introducendo un po' di nomenclatura:

1. Set^* è la categoria degli insiemi puntati i cui oggetti sono coppie (X, x_0) con $x_0 \in X$ e i morfismi sono funzioni che fissano i punti base
2. Pos insiemi parzialmente ordinati e funzioni monotone
3. Mon è la categoria i cui oggetti sono i monoidi e i cui morfismi sono i morfismi di monoidi

4. Grp è la categoria i cui oggetti sono i gruppi e i cui morfismi sono i morfismi di gruppi
5. Ab gruppi abeliani e morfismi di gruppi
6. Rng anelli e morfismi di anelli
7. Ring anelli unitari e morfismi unitari di anelli
8. CRng anelli commutativi e morfismi di anelli
9. Mod_R moduli e morfismi di moduli (R anello commutativo unitario)
10. Vec_K spazi vettoriali sul campo K e funzioni lineari
11. FinVec_K spazi vettoriali con dimensione finita sul campo K e funzioni lineari
12. Alg_R algebre e morfismi di algebre sull'anello commutativo unitario R
13. Top spazi topologici e funzioni continue
14. Top^* spazi topologici puntati e funzioni continue che fissano i punti base
15. Toph spazi topologici e classi di funzioni continue modulo omotopia
16. Met_c spazi metrici con funzioni continue
17. Met_u spazi metrici con funzioni uniformemente continue
18. Met_l spazi metrici con funzioni lipschitziane
19. Man^k varietà differenziabili con funzioni di classe C^k con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
20. Mis spazi misurabili e funzioni misurabili
21. Mat categoria i cui oggetti sono numeri interi e i cui morfismi sono matrici a coefficienti nel campo K
22. SET la categoria degli insiemi (piccoli ma anche larghi) con le funzioni
23. Gli analoghi larghi delle altre categorie definite prima
24. CAT la categoria di tutte le categoria con i funtori

Osserviamo che ogni branca della matematica può essere pensata come lo studio di una particolare categoria oppure, come avviene in modo particolarmente evidente per l'analisi, si fissa un certo insieme o oggetto privilegiato (come può essere $\mathbb{R}^n$) e si studiano le interazioni tra le varie strutture di cui quell'insieme può essere dotato.

Riguardo agli esempi presentati sono particolarmente significativi Toph che mostra come i morfismi possano non essere funzioni, le varie categorie "metriche" che evidenziano come l'elemento essenziale siano i morfismi e non gli oggetti ed infine l'esempio più importante: Mat. Questo esempio è molto utile per abbandonare l'idea che gli oggetti siano in qualche modo "enti estesi" e che in fondo tutte le categorie siano insiemi dotati di qualche struttura aggiuntiva e funzioni che conservano quella struttura. In teoria delle categorie gli oggetti sono "punti" della cui composizione interna non ci preoccupiamo, ma di cui ci interessano soltanto le relazioni reciproche, individuate dai morfismi. D'altra parte questa categoria è isomorfa alla ben nota categoria FinVec_K.

Diamo ora qualche esempio di funtore

- $\mathcal{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ che ad ogni insieme associa il suo insieme delle parti e ad ogni funzione $f : X \to Y$ associa $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ data da $\mathcal{P}f(S) = f(S)$ è il funtore delle parti

- $^* : \mathsf{Vec} \to \mathsf{Vec}$ il funtore controvariante spazio duale (che è un funtore Hom)

- $H_n : \mathsf{Top} \to \mathsf{Ab}$ il funtore che ad ogni spazio topologico associa il suo n-esimo gruppo di omologia e ad ogni funzione continua il morfismo di gruppi indotto.

- Analogamente per i gruppi di coomologia che risultano essere funtori controvarianti

- $\pi_n : \mathsf{Top}^* \to \mathsf{Grp}$ il funtore gruppo di omotopia

- $Ab : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$ il funtore abelianizzazione che ad ogni gruppo associa il suo abelianizzato e sui morfismi agisce come l'identità (dato che i morfismi di gruppi mandano commutatori in commutatori)

- $U : \mathsf{Rng} \to \mathsf{Grp}$ il funtore che associa ad ogni anello il suo gruppo degli invertibili e che agisce sui morfismi come l'identità

- $GL_n : \mathsf{CRng} \to \mathsf{Grp}$ che ad ogni anello commutativo R associa il gruppo $GL_n(R)$ e ad ogni morfismo di anelli associa il morfismo che agisce componente per componente

Definizione 1.4.2
Sia $A = \mathsf{Grp}, \mathsf{Mod}_R, \mathsf{Rng}, \mathsf{Alg}, \ldots$. Il funtore $S : \mathsf{Set} \to A$ che ad ogni insieme associa il gruppo, modulo, anello, algebra libera, ... su quell'insieme e ad ogni funzione associa quella estesa a partire dai generatori si dice **funtore libero**

Definizione 1.4.3
Sia B è una categoria definita introducendo su degli insiemi certa struttura e definendo morfismi le funzioni che conservano quella struttura. Il funtore $U : B \to \mathsf{Set}$ che ad ogni oggetto associa il suo insieme sostegno e agisce sui morfismi come l'identità si dice **funtore dimenticante**

Come possiamo osservare dagli esempi sui gruppi di omologia e coomologia e sui gruppi di omotopia la topologia algebrica si può riassumere come lo studio dei funtori da $\mathsf{Top}, \mathsf{Top}^*, \mathsf{Toph}$ in un'opportuna categoria "algebrica" come quella dei gruppi o dei moduli. La topologia algebrica si nutre della speranza di trovare un funtore conservativo con dominio Top (che non sia impossibile da calcolare) in modo da poter dire che due spazi sono omeomorfi se e solo se sono isomorfi i loro oggetti algebrici corrispondenti.
Per quanto riguarda la geometria algebrica sono di fondamentale importanza i funtori rappresentabili e le immersioni di Yoneda.

Capitolo 2

Universi di Grothendieck

In questo capitolo presentiamo quello che è l'approccio più comune per affrontare i problemi fondazionali esaminati nel capitolo precedente. In sostanza si tratta di fissare un insieme, che sarà il nostro universo, che sia "abbastanza grande" cioè chiuso per tutte le principali costruzioni insiemistiche, chiamare insiemi piccoli i suoi elementi e insiemi grandi gli altri. Ovviamente non è chiaro se un tale insieme esista o meno e servirà un assioma per garantirne l'esistenza. Dimostreremo inoltre che assumere l'esistenza di un universo di Grothendieck equivale ad assumere l'esistenza di un cardinale inaccessibile, che intuitivamente può essere pensato come un cardinale così grande da non poter essere raggiunto a partire da cardinali più piccoli.
La referenza classica relativa all'equivalenza tra universi di Grothendieck e inaccessibili è [Bou], il quale fa uso — senza farne menzione — dell'assioma della scelta, sia per definire gli inaccessibili, che per mostrare l'equivalenza dei due assiomi; il cuore di questa tesi consiste proprio nella riscrittura di tale dimostrazione prescindendo dall'assioma della scelta e dall'assioma di fondazione.
In questa sezione abbiamo seguito [Shu]; per quanto riguarda la definizione di universo ci rifacciamo allo stesso Grothendieck in [Bou] e per le correzioni relative all'assioma della scelta a [BDL] e [Sol].
Osserviamo che sebbene l'argomento sia stato studiato fin dagli anni '60 e '70 del secolo scorso, soltanto in tempi molto recenti, con l'articolo [BDL] e la comunicazione personale di Solovay [Sol] sono stati esplorati i legami con l'assioma della scelta ed è stata mostrata l'indipendenza dell'assioma degli universi da quello della scelta.
A riprova di tale recente fermento possiamo citare l'articolo [McL] in cui si studia il problema — posto dalle conseguenze in aritmetica della teoria delle categorie — di quale sia il minimo indispensabile dal punto di vista fondazionale per ottenere tali risultati. Nell'articolo si considera la cosiddetta teoria degli insiemi di Mac Lane che consiste nella teoria di Zermelo-Fraenkel con, al posto dell'assioma di rimpiazzamento, l'assioma di isolamento limi-

tato, cioè l'isolamento relativo a formule in cui i quantificatori sono limitati; a tale teoria si aggiunge l'assioma della scelta e un assioma degli universi e si mostra come la consistenza di tale teoria segua da quella di ZFC. Infine vengono date le definizioni di categoria piccola, localmente piccola, funtore e trasformazione naturale in modo leggermente diverso dal nostro, in modo da consentirne un utilizzo efficace anche in assenza dell'assioma di rimpiazzamento.

2.1 Universi di Grothendieck

Definizione 2.1.1
Chiamiamo **universo** (di Grothendieck) un insieme $\mathcal{U}$ che gode delle seguenti proprietà:

(U1) Se $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in X$ allora $Y \in \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U}$ è transitivo

(U2) Se $X, Y \in \mathcal{U}$ allora $\{X, Y\} \in \mathcal{U}$, cioè è chiuso rispetto alle coppie

(U3) Se $X \in \mathcal{U}$ allora $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{U}$, cioè è chiuso rispetto alle parti

(U4) Se $X_\alpha \in \mathcal{U}$ per ogni $\alpha \in I$ e $I \in \mathcal{U}$ allora $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \in \mathcal{U}$, cioè è chiuso rispetto ad unioni indicizzate da suoi elementi

Un universo è non banale sse $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Definizione 2.1.2
Definiamo per ricorsione transfinita la cosiddetta **gerarchia cumulativa**.

- $V_0 := \emptyset$
- se α è il successore di β poniamo $V_\alpha := \mathcal{P}(V_\beta)$
- se α è un ordinale limite $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$

Osserviamo che $\emptyset$ e V_ω dove ω è il primo ordinale numerabile, sono universi, quindi la definizione di non banalità non è ridondante. Quando parleremo di universi saremo ovviamente interessati a quelli non banali.

Dimostriamo ora che le proprietà che definiscono gli universi sono sufficienti ad assicurare che questi siano chiusi rispetto alle principali costruzioni insiemistiche:

Teorema 2.1.1 (Bourbaki [Bou])

1. *se* $X \in \mathcal{U}$ *e* $Y \subseteq X$ *allora* $Y \in \mathcal{U}$

2. *se $X \in \mathcal{U}$ allora ogni insieme quoziente ottenuto a partire da X è in $\mathcal{U}$*

3. *se $X \in \mathcal{U}$ allora $\{X\} \in \mathcal{U}$*

4. *se $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{U}$ allora $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{U}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$*

5. *se $X, Y \in \mathcal{U}$ allora $X \times Y \in \mathcal{U}$*

6. *se $X, Y \in \mathcal{U}$ allora tutte le corrispondenze tra X e Y sono in $\mathcal{U}$*

7. *se $I \in \mathcal{U}$ e $X_\alpha \in \mathcal{U}$ per ogni $\alpha \in I$ allora $\displaystyle\sum_{\alpha \in I} X_\alpha, \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \in \mathcal{U}$*

8. *se $X \in \mathcal{U}$, $Y \subseteq \mathcal{U}$ e $f : X \twoheadrightarrow Y$ allora $Y \in \mathcal{U}$*

9. *se $X \subseteq \mathcal{U}$ e la sua cardinalità è al più quella di un elemento di $\mathcal{U}$ allora $X \in \mathcal{U}$*

Dim.

1. banale applicando (U3) e (U1)

2. i quozienti sono insiemi di sottoinsiemi quindi segue da (U3) e dal punto precedente

3. segue da (U2) scegliendo $Y = X$

4. da (U2) e dal punto precedente segue che $(X, Y) \in \mathcal{U}$, per le enuple si procede per induzione

5. osserviamo inizialmente che per ogni $x \in X$ si ha $\{x\} \times Y = \displaystyle\bigcup_{y \in Y} \{(x, y)\}$, per quanto già visto nei due punti precedenti $\{(x, y)\} \in \mathcal{U}$ e per (U4) abbiamo $\{x\} \times Y \in \mathcal{U}$. Analogamente $X \times Y = \displaystyle\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$ che appartiene ad $\mathcal{U}$ per (U4)

6. una corrispondenza tra X e Y è una tripletta (X, Y, Γ) con $\Gamma \subseteq X \times Y$, abbiamo la tesi visti i punti precedenti

7. per la somma $\displaystyle\sum_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$. Per quanto riguarda il prodotto $\displaystyle\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \textstyle\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in I\}$ quindi la tesi segue facilmente dai punti precedenti in quanto le funzioni sono particolari corrispondenze

8. nelle ipotesi possiamo scrivere $Y = \displaystyle\bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$ e per (U4) e per i punti precedenti $Y \in \mathcal{U}$

9. sia $i : X \hookrightarrow I$ con $X \subseteq \mathcal{U}$ e $I \in \mathcal{U}$, dunque abbiamo una suriezione $I' \twoheadrightarrow X$ con $I' \subseteq I$, quindi la tesi segue dal punto precedente

$\square$

Corollario 2.1.2
Sia $\mathcal{U}$ un universo non banale, allora $(\mathcal{U}, \in)$ è un modello di ZF

Introduciamo il seguente assioma a cui nel seguito ci riferiremo indicandolo come l'**assioma degli universi**:

(U) esiste $\mathcal{U}$ universo non banale

In ZF+U si può provare la consistenza di ZF, dato che ne abbiamo costruito un modello; dunque per il secondo teorema di Gödel ZF+U è una teoria strettamente più forte di ZF e questo mostra come l'assioma U non si possa dimostrare in ZF.
Rimandiamo a [Sol] per la costruzione di un modello di:

ZF + "ogni insieme è elemento di un universo di Grothendieck" + "$\mathbb{R}$ non è ben ordinabile"

questo mostra che l'assioma della scelta non è conseguenza dell'assioma degli universi U.

2.2 Cardinali inaccessibili

Senza assioma della scelta non c'è un modo canonico per confrontare la "grandezza" di due insiemi, quindi la nozione di cardinale inaccessibile dipende fortemente dal modo in cui vengono effettuati questi confronti, per una discussione approfondita al riguardo rimandiamo a [BDL].
Quando si parla di cardinali inaccessibili si distinguono cardinali debolmente e fortemente inaccessibili, ma dei primi non parleremo dato che non sono di particolare interesse in questo ambito. Si possono inoltre dare varie definizioni di cardinale fortemente inaccessibile che risultano tutte equivalenti in presenza dell'assioma della scelta, noi ne scegliamo una in particolare (di v-inaccessibilità) per la sua relazione con gli universi di Grothendieck.
Diamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.2.1
Sia α un ordinale

- $X \subseteq \alpha$ si dice **cofinale** o illimitato sse per ogni $\beta \in \alpha$ esiste $x \in X$ tale che $\beta \in x$

- definiamo la **cofinalità** di α come

  $\mathrm{cof}(\alpha) := \min\{\beta \text{ ordinale} \mid \exists f : \beta \to \alpha \text{ monotona, tale che } f(\beta) \subseteq \alpha \text{ sia cofinale in } \kappa\}$

- α si dice **cardinale regolare** sse coincide con la sua cofinalità

Osservazione 2.2.1
Nella definizione di cofinalità è irrilevante la richiesta che $f : \alpha \to \kappa$ sia monotona. Infatti essendo la cofinalità definita come minimo, se una funzione con immagine cofinale in κ non fosse monotona esisterebbe sicuramente una funzione monotona con le stesse proprietà di cofinalità avente come dominio un cardinale minore.

Definizione 2.2.2
Si dice **cardinale fortemente v-inaccessibile** un cardinale κ tale che:

(V1) κ è regolare

(V2) per ogni $\alpha < \kappa$ con α ordinale si ha che non esiste alcuna $f : V_\alpha \twoheadrightarrow \kappa$

Un cardinale fortemente v-inaccessibile si dice non banale sse è più che numerabile.

È necessario specificare la definizione di non banalità in quanto ω è un cardinale fortemente v-inaccessibile; quando andremo a definire gli altri grandi cardinali non ci preoccuperemo ulteriormente e includeremo nella definizione la condizione di non banalità.
Si parla di cardinali v-inaccessibili per richiamare il legame con la gerarchia cumulativa V_α.

Lemma 2.2.1 (Blass, Dimitriou, Löwe [BDL])
Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- *κ è un cardinale regolare, più che numerabile e per ogni $\alpha < \kappa$ con α ordinale si ha che non esiste alcuna $f : V_\alpha \twoheadrightarrow \kappa$*

- *κ è un cardinale regolare, più che numerabile e per ogni $\alpha < \kappa$ con α ordinale e per ogni $C \subseteq \kappa$ con C cofinale in κ si ha che non esiste alcuna $f : V_\alpha \twoheadrightarrow C$*

Dim.

($\Rightarrow$) Supponiamo per assurdo che esista $\beta < \kappa$ ordinale ed esista $f : V_\beta \twoheadrightarrow C$ con $C = f(V_\beta)$ cofinale in κ. Essendo $f(V_\beta)$ sottoinsieme di un insieme ben ordinato è a sua volta un insieme ben ordinato quindi esiste un unico γ ordinale a cui è simile, quindi abbiamo $\gamma \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow f(V_\beta) \subseteq \kappa$. Se fosse $\kappa \leq \gamma$ avremmo $V_\beta \twoheadrightarrow f(V_\beta) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \gamma \supseteq \kappa$ che è assurdo per l'ipotesi di inaccessibilità. Quindi $\gamma \in \kappa$, che è un assurdo per la regolarità di κ.

($\Leftarrow$) Banale

$\square$

Teorema 2.2.2 (Bourbaki [Bou])
Sono equivalenti:

(U) Esiste un universo di Grothendieck non banale.

(I) Esiste un cardinale fortemente v-inaccessibile non banale.

Dim.

($\Rightarrow$) Sia $\mathcal{U}$ universo non banale, definiamo $\kappa := \{\alpha \in \mathcal{U} \,|\, \alpha \text{ è ordinale}\}$ e mostriamo che è un cardinale fortemente v-inaccessibile.
Ogni elemento di un ordinale è un ordinale e $\mathcal{U}$ è transitivo, quindi gli elementi degli ordinali di $\mathcal{U}$ sono ancora ordinali di $\mathcal{U}$ dunque κ è un ordinale in quanto insieme transitivo di ordinali. Se per assurdo κ non fosse un cardinale esisterebbe $\alpha \in \kappa$ ed esisterebbe $f : \alpha \twoheadrightarrow \kappa$ quindi per la proprietà (8) del teorema 2.1.1 avremmo che $\kappa \in \mathcal{U}$. Questo è un assurdo perché si avrebbe $\kappa \in \kappa$ che è falso per ogni ordinale, quindi κ è un cardinale.
Mostriamo che κ è regolare, cioè che $\kappa = \mathrm{cof}(\kappa)$. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha \in \kappa$ ed esista $f : \alpha \to \kappa$ con $f(\alpha)$ cofinale in κ, allora avremmo $\kappa = \bigcup f(\alpha)$ e per le proprietà di chiusura degli universi $\kappa \in \mathcal{U}$, che abbiamo già osservato condurre ad un assurdo.
Dimostriamo ora la proprietà di inaccessibilità: se per assurdo esistesse $\alpha \in \kappa$ ed esistesse $f : V_\alpha \twoheadrightarrow \kappa$ allora per le proprietà di chiusura dell'universo si avrebbe $V_\alpha \in \mathcal{U}$ e dato che $\kappa \subseteq \mathcal{U}$ sempre per tali proprietà otterremmo $\kappa \in \mathcal{U}$.
Infine dato che $\mathcal{U}$ è un universo non banale e che $\mathbb{N}$ ammette un buon ordine si ha che κ è un cardinale fortemente v-inaccessibile non banale.

($\Leftarrow$) Sia κ un cardinale fortemente v-inaccessibile non banale, poniamo $\mathcal{U} := V_\kappa$ ossia la gerarchia cumulativa costruita fino al cardinale κ.
(U1) Affinché un'unione sia un insieme transitivo basta che lo siano le componenti, dimostriamo dunque che ogni V_α è transitivo. Procediamo per induzione transfinita su $\alpha \in \kappa$: se $\alpha = 0$ banale. Se $x \in V_{\alpha+1}$ allora

$x \in \mathcal{P}(V_\alpha)$ quindi $y \in x \subseteq V_\alpha$. Il caso in cui α è un ordinale limite è banale usando l'ipotesi di induzione.
(U2) Siano $x, y \in \mathcal{U}$, dato che la famiglia dei V_α è crescente esiste $\gamma \in \kappa$ tale che $x, y \in V_\gamma$. Allora $\{x, y\} \in \mathcal{P}(V_\gamma) \subseteq \mathcal{U}$.
(U3) Mostriamo che per ogni $\alpha \in \kappa$ se $x \in V_{\alpha+1}$ allora $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, per induzione transfinita. $\alpha = 0$ banale. Da $x \in \mathcal{P}(V_\alpha)$ segue che $x \subseteq V_\alpha$, allora abbiamo $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$ cioè $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha)) = V_{\alpha+2}$. Il caso di α ordinale limite è immediato usando l'ipotesi induttiva.
(U4) Sia $\{x_t\}_{t\in T}$ famiglia di elementi di $\mathcal{U}$ con $T \in \mathcal{U}$ e $x := \bigcup_{t\in T} x_t$, abbiamo che per ogni $t \in T$ esiste un unico $\alpha \in \kappa$ minimo tale che $x_t \in V_\alpha$, dunque tale relazione definisce una funzione $f : T \to \kappa$. Per assurdo sia $f(T)$ cofinale in κ allora, dato che $T \in V_\alpha$ per qualche α si ha che esisterebbe β tale che $T \subseteq V_\beta$. Possiamo quindi estendere la funzione f a $F : V_\beta \twoheadrightarrow f(T)$, dunque abbiamo un assurdo per il lemma 2.2.1. Visto che $f(T)$ non è cofinale in κ, esiste γ tale che $x_t \in V_\gamma$ per ogni $t \in T$ per la crescenza della famiglia dei V_α. Infine per ogni $a \in x$ esiste $t \in T$ tale che $a \in x_t \in V_\gamma$ quindi per la transitività già dimostrata $x \subseteq V_\gamma$ ergo $x \in \mathcal{U}$.

□

Osservazione 2.2.2
Si può osservare con quanta naturalezza e disinvoltura Bourbaki usi l'assioma della scelta nella dimostrazione del teorema 2.2.2 data in [Bou]. Ne diamo alcuni esempi.

Innanzitutto la definizione di cardinale fortemente inaccessibile utilizzata poggia sull'assioma della scelta in quanto presuppone di poter sempre confrontare la cardinalità di due insiemi.

Nella dimostrazione della prima implicazione, per costruire il cardinale inaccessibile, invece di procedere nel modo da noi utilizzato si usa l'assioma per associare ad x il suo cardinale $\mathrm{c}(x)$, poi si pone $\kappa := \sup_{x\in\mathcal{U}} \mathrm{c}(x)$.

Nella dimostrazione della seconda implicazione si espone un risultato preliminare: per ogni $x \in \mathcal{U}$ la cardinalità di x è strettamente minore della cardinalità di κ; tale risultato viene dimostrato per induzione transfinita utilizzando il teorema del buon ordinamento e l'ipotesi di inaccessibilità di κ. Infine per dimostrare (U4) si procede nel modo seguente: si dota T di un buon ordine usando l'assioma della scelta e si nega la tesi cercando un assurdo. L'ipotesi di assurdo porta a dire che $f(T)$ è cofinale in κ; invece di concludere la dimostrazione sfruttando la regolarità del cardinale fortemente inaccessibile si perviene ad un assurdo usando il risultato preliminare.

Definizione 2.2.3
Si dice **cardinale fortemente $\overline{s}$-inaccessibile** un cardinale κ tale che:

(S1) κ è regolare

(S2) κ è **limite forte** cioè è un cardinale limite e per ogni $\lambda \in \kappa$ si ha che non esiste alcuna $f : \mathcal{P}(\lambda) \twoheadrightarrow \kappa$

Osservazione 2.2.3
Notiamo che se κ è un cardinale fortemente v-inaccessibile allora è anche fortemente $\overline{s}$-inaccessibile, infatti ragionando in modo analogo a quanto fatto per dimostrare (U3) si ottiene che per ogni λ ordinale $\mathcal{P}(\lambda) \in V_{\lambda+2}$, quindi se abbiamo una suriezione dalle parti di λ su κ ne otteniamo una anche da $V_{\lambda+2}$ su κ.

Si parla di cardinali $\overline{s}$-inaccessibili perché si esprime il fatto che un insieme è più grande di un altro dicendo che non ci sono suriezioni dal più piccolo nel più grande.

Dalla discussione fatta fin qui non risulta chiaramente quali conseguenze abbia l'assunzione dell'esistenza di un cardinale fortemente inaccessibile nella matematica "quotidiana" e si potrebbe concordare con Hausdorff quando sostenne che i cardinali inaccessibili sono così grandi da avere poca importanza nella teoria degli insiemi ordinaria [Moo]; invece l'esistenza di un cardinale fortemente inaccessibile può influenzare addirittura $\mathbb{R}$. Prima di presentare tale risultato introduciamo l'**assioma delle scelte dipendenti**:

(DC) Sia ρ una relazione binaria su un insieme $X \neq \emptyset$ con la proprietà che per ogni $x \in X$ esiste $y \in X$ tale che $x \,\rho\, y$. Allora esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X tale che $x_n \,\rho\, x_{n+1}$ per ogni n

Si può dimostrare che l'assioma della scelta è più forte dell'assioma delle scelte dipendenti, il quale a sua volta è più forte dell'assioma della scelta numerabile.
L'assioma delle scelte dipendenti è sufficiente per sviluppare la gran parte della teoria della misura di Lebesgue, tuttavia vale il seguente:

Teorema 2.2.3 (Solovay [Je])
Se esiste un modello di ZFC+I allora esiste un modello di

ZF+DC+"ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ *è misurabile secondo Lebesgue"*

Shelah ha dimostrato che l'ipotesi dell'esistenza di un cardinale fortemente inaccessibile è essenziale [Moo].
Quindi se si assume l'esistenza di un cardinale fortemente inaccessibile si ottiene che l'assioma della scelta è indispensabile per produrre un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non misurabile secondo Lebesgue e che non basta indebolire AC limitandosi all'assioma delle scelte dipendenti.

Osserviamo che l'assioma (I) è molto simile all'assioma dell'infinito di ZF in quanto afferma l'esistenza, altrimenti indimostrabile, di un insieme con certe proprietà di inaccessibilità. Il primo istinto di fronte ad assiomi di questo tipo è la diffidenza: trattandosi di semplici e spoglie asserzioni del tipo "questo esiste" la loro natura di assioma si mostra più esplicita che mai ricordandoci che giochiamo tutti i giorni una partita d'azzardo, dove scommettiamo sulla coerenza e la posta che mettiamo sul piatto è l'intera matematica.

Ora è giunto il momento di addentrarci brevemente nel regno dei grandi cardinali per familiarizzare su quanto possano essere *grandi* questi cardinali e su quanto possano essere azzardate queste scommesse (si vedano [HML] e [Shu]).

Definizione 2.2.4
Sia κ un cardinale regolare più che numerabile. Diciamo che $C \subseteq \kappa$ è **chiuso** sse per ogni $\gamma < \kappa$ si ha che $C \cap \gamma$ illimitato in γ implica $\gamma \in C$.

Dato κ cardinale regolare più che numerabile osserviamo che l'insieme $C := \{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ è cardinale}\}$ è sempre chiuso in κ. C è chiuso e illimitato se e solo se κ è un cardinale limite.

Definizione 2.2.5
Dato κ cardinale regolare più che numerabile diciamo che $X \subseteq \kappa$ è **stazionario** sse per ogni $C \subset \kappa$ chiuso e cofinale in κ si ha $C \cap X \neq \emptyset$.

Definizione 2.2.6
Un cardinale si dice **fortemente n-iperinaccessibile** sse è regolare, più che numerabile e l'insieme dei cardinali fortemente $(n-1)$-iperinaccessibili è stazionario.

Definizione 2.2.7
Un cardinale κ si dice **Mahlo** sse è regolare, più che numerabile e l'insieme di tutti i cardinali fortemente n-iperinaccessibili (al variare di $n \in \mathbb{N}$) minori di κ è stazionario.

Definizione 2.2.8
Un cardinale si dice **n-iperMahlo** sse è regolare, più che numerabile e l'insieme dei cardinali $(n-1)$-iperMahlo è stazionario.

Si può continuare definendo ulteriori nozioni analoghe a quella di car-

dinale Mahlo ottenendo la stazionarietà dell'insieme degli inaccessibili più piccoli.
Assumere l'esistenza di uno di questi grandi cardinali porta un modello di ZF in cui esistono tutti i cardinali più piccoli, quindi l'assioma (I) che ci apprestiamo ad introdurre, se confrontato con gli assiomi relativi ai grandi cardinali, appare piuttosto modesto e ragionevole.

2.3 Problemi risolti e problemi insoluti

Definizione 2.3.1
Dato $\mathcal{U}$ un universo diciamo che X è un **insieme piccolo** sse $X \in \mathcal{U}$.
Diciamo che è un **insieme largo** sse non è piccolo.

Siamo ora in grado di giustificare le definizioni e i teoremi del capitolo precedente che avevamo lasciato in sospeso. In particolare possiamo costruire l'immersione di Yoneda per ogni categoria localmente piccola. Il pregio di questo approccio è che riesce a risolvere un buon numero di problemi fondazionali ad un "modico prezzo": quello di postulare l'esistenza di un cardinale fortemente v-inaccessibile.

Occupiamoci ora dei problemi a cui questo approccio non riesce a dare risposta: abbiamo definito senza timore le categorie grandi e ne abbiamo dati svariati esempi, tuttavia se tali categorie non sono localmente piccole non possiamo costruire un'immersione di Yoneda; inoltre, se vogliamo studiare la teoria di tutte le categorie, l'approccio che abbiamo seguito fin'ora si arena in quanto la totalità delle categorie larghe e piccole non forma un insieme né largo né piccolo. Si può dunque decidere di optare per un ulteriore rafforzamento gli assiomi, introducendo uno dei due assiomi equivalenti (che sono stati quelli inizialmente introdotti da Grothendieck):

(U') per ogni x insieme esiste $\mathcal{U}$ universo tale che $x \in Un$

(I') per ogni α cardinale esiste κ cardinale fortemente inaccessibile tale che $\alpha < \kappa$

Questa scelta consente ora di costruire immersioni di Yoneda per ogni categoria e di definire la categoria di tutte le categorie larghe. Tuttavia comunque si fissi un universo vi sono categorie ancora più grandi al di fuori di esso che vorremmo poter racchiudere in un'unica categoria definita una volta per tutte.
Inoltre questa scelta è inutilmente dispendiosa e conviene scartarla fin da subito, infatti (vedi [Mac69]) un universo è sufficiente per rimediare al problema delle immersioni di Yoneda: dato un insieme largo S, nell'osservazione che segue costruiremo un'immersione di Yoneda scegliendo opportunamente la categoria degli insiemi in cui lavorare.

Osservazione 2.3.1
Sia $Dx := \bigcup\{x, \mathcal{P}(x), \cup x\}$, ora definiamo per ricorsione gli insiemi $D_\alpha S$ dove α sono ordinali piccoli: $D_0 S := S$, $D_{\alpha+1} S := D(D_\alpha S)$ e per ordinali limite $D_\alpha S := \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta S$. Infine chiamiamo $\overline{S} := \bigcup_\alpha D_\alpha S$.
Ripercorrendo la dimostrazione del teorema 2.1.1 possiamo dimostrare molte proprietà di chiusura per $\overline{S}$ simili a quelle degli universi, esclusa la proprietà (U4) che è sostituita dalla più debole chiusura rispetto alle unioni: per ogni $x \in \overline{S}$ si ha che $\bigcup x \in \overline{S}$. Possiamo quindi costruire a partire da S la categoria Ens_S dove l'insieme (largo) degli oggetti è $\overline{S}$ e l'insieme dei morfismi è l'insieme (largo) delle funzioni tra elementi di $\overline{S}$. In questo modo per ogni categoria C possiamo costruire un'opportuna immersione di Yoneda scegliendo come S l'insieme dei morfismi della categoria immergendo dunque C in $Funct(C^{op}, \mathsf{Ens}_S)$.

Concentriamoci ora sulle ulteriori criticità della soluzione proposta: come si osserva in [Mu], quello che è strettamente necessario per fondare la teoria delle categorie sulla base della teoria degli insiemi è avere a disposizione: $V, \mathcal{P}(V), \ldots, \mathcal{P}^n(V)$ per qualche intero n e dove V è l'insieme grande di tutti gli insiemi piccoli. Assumere l'esistenza di un cardinale fortemente inaccessibile porta con sé l'intera immensa, interminabile e inutilmente dispendiosa gerarchia cumulativa costruita a partire da quell'inaccessibile. Supporre l'esistenza di un'infinità di cardinali fortemente inaccessibili è talmente sovrabbondante da mettere alla prova la nostra immaginazione, già temprata dall'incontro con qualche grande cardinale.
Paradossalmente questo immane dispendio di forze non risolve tutti i problemi in quanto non siamo ancora in grado di definire rigorosamente oggetti come SET e CAT e quindi lo studio della categoria di tutte le categorie rimane ancora fuori dalla nostra portata. Così come vi sono seri problemi di cambio di universo, infatti se ci imbattiamo in un insieme più grande del previsto che vogliamo relazionare con oggetti della categoria degli insiemi piccoli Set, o di relazionare due di tali categorie grandi Ens_S o due universi fra loro, non vi è alcuna ragione *a priori* per cui una proprietà dimostrata all'interno di un universo si mantenga nel nuovo. Se tali proprietà dipendono dalla taglia dell'universo è ragionevole aspettarsi che possa cambiare qualcosa e maneggiare i cambi di universo diventa particolarmente disagevole.
Oltre a questi rilievi tecnici possiamo notare come l'intento iniziale della teoria delle categorie e la sua aspirazione a parlare di forma e struttura, vengano frustrati dalla necessità di limitarsi a qualche piccola area fissata del ben più ampio dominio del discorso della teoria degli insiemi.

Appendice A

Assiomi di ZF e teorie del prim'ordine

Il nostro scopo è presentare formalmente la teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF), all'interno di essa definire i linguaggi e le teorie del primo ordine; arriveremo a citare i teoremi di incompletezza di Gödel di cui abbiamo fatto uso nel secondo capitolo.

A.1 La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel

Il linguaggio della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel è costituito da un linguaggio predicativo del prim'ordine con uguaglianza, dotato di un unico simbolo non logico $\in$, che soddisfa i seguenti assiomi:

(ZF1) $\forall a(a \in b \Leftrightarrow a \in c) \Rightarrow b = c$ assioma di estensionalità: due insiemi che hanno gli stessi elementi coincidono

(ZF2) $\forall a\ \exists b\ \forall c\,[c \in b \Leftrightarrow \forall d\,(d \in c \Rightarrow d \in a)]$ assioma delle parti: ogni insieme ha un insieme delle parti

(ZF3) $\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall d\,[d \in c \Leftrightarrow (d = a \vee d = b)]$ assioma della coppia: comunque dati due insiemi a e b esiste l'insieme $\{a, b\}$

(ZF4) $\forall a\ \exists b\ \forall c\,[c \in b \Leftrightarrow \exists d\,(d \in a \wedge c \in d)]$ assioma dell'unione: per ogni insieme a esiste l'insieme degli elementi degli elementi di a

(ZF5) $[\forall x \in a\ \exists! y : \phi(x, y)] \Rightarrow [\exists b\ \forall c\,(c \in b \Leftrightarrow \exists d : d \in a \wedge \phi(d, c)\,)]$ assioma di rimpiazzamento: l'immagine di un insieme attraverso una formula univoca con due variabili libere è ancora un insieme

Definizione A.1.1
Chiamiamo **insieme vuoto** l'insieme $\emptyset$ che gode della proprietà che per ogni insieme x si ha che $x \notin \emptyset$

Se l'insieme vuoto esiste è unico in virtù dell'assioma di estensionalità.
Introduciamo ora l'ultimo assioma:

(ZF6) $\exists N : \emptyset \in N \wedge \forall a (a \in N \Rightarrow \bigcup\{a, \{a\}\} \in N)$ assioma dell'infinito.

Osserviamo che tale assioma garantisce anche l'esistenza dell'insieme vuoto.

Definizione A.1.2
Diamo le seguenti definizioni:

- Diciamo che un insieme è **sottoinsieme** di un altro e scriviamo $a \subseteq b$ sse $\forall x (x \in a \Rightarrow x \in b)$
- Chiamiamo **insieme delle parti** e lo indichiamo con $\mathcal{P}(x)$ l'insieme di cui è garantita l'esistenza per (ZF3)
- Definiamo l'**unione** di due insiemi come $a \cup b := \bigcup\{a, b\}$
- Definiamo la **coppia ordinata** come $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Si dice assioma di isolamento:

(Is) $\forall a \, \exists b \, \forall c \, [c \in b \iff c \in a \wedge \phi(c)]$

Esso consente di costruire insiemi a partire da altri insiemi mediante formule ben formate.

Mostriamo che l'assioma di rimpiazzamento consente di dedurre l'assioma di isolamento: osserviamo che per ogni formula $\psi(x)$ la formula $\psi(x) \wedge x = y$ è univoca su qualunque insieme a, dal rimpiazzamento deduciamo l'esistenza di $\{y \,|\, \exists x \in a(\psi(x) \wedge x = y)\}$, infine usando l'assioma di estensionalità verifichiamo che coincide con $\{y \in a \,|\, \psi(y)\}$.

Definizione A.1.3
Usando l'assioma di isolamento possiamo definire:

- l'**intersezione** di due insiemi $a \cap b := \{x \in a \,|\, x \in b\}$
- l'intersezione arbitraria di insiemi, sia ϕ una formula e $\phi(y_0)$ allora:

$$\bigcap\{y \,|\, \phi(y)\} := \{z \in y_0 \,|\, \forall y \, (\phi(y) \Rightarrow z \in y)\}$$

- il **prodotto cartesiano** di due insiemi

$$A \times B := \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \,|\, \exists a \in A \quad \exists b \in B : x = (a, b)\}$$

- le **funzioni** come insiemi di coppie ordinate in cui per ogni a nel dominio esiste un unico b nel codominio tale che $(a, b) \in f$

Vista la definizione di intersezione e visto che l'assioma dell'infinito ci garantisce l'esistenza di N tale che $\psi(N)$ dove $\psi(I)$ è la formula:

$$\emptyset \in I \wedge \forall x\,(x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I)$$

abbiamo quindi assicurata l'esistenza di $\omega := \bigcap\{I \,|\, \psi(I)\}$. Definiamo la funzione successore: dato $n \in \omega \quad s(n) := n \cup \{n\}$; infine poniamo $\mathbb{N} := (\omega, \emptyset, s)$. Si può controllare che $\mathbb{N}$ verifica gli assiomi di Peano e quindi è un sistema di numeri naturali.

Si può aggiungere un ulteriore assioma alla teoria fin qui esposta, che viene detto **assioma della scelta**; la teoria di Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta viene denominata ZFC. L'assioma è il seguente:

(AC) $\forall \{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di insiemi non vuoti esiste una **funzione di scelta**, cioè $f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ tale che $f(i) \in A_i \; \forall i \in I$

Tale assioma è controverso e viene criticato in particolar modo dai costruttivisti i quali obiettano che supporre l'esistenza di una funzione di scelta equivale a supporre di poter scegliere un elemento da ciascuno degli insiemi A_i anche quando I è infinito e questa è un'assunzione problematica in quanto significa dare per scontata la possibilità di poter effettuare in un tempo finito un'infinità di atti del pensiero.
Al di là di queste critiche a cui si potrebbe obiettare eventualmente sul piano filosofico vi è il fatto, squisitamente matematico, che spesso vi è un abuso dell'assioma della scelta per mera pigrizia, in quanto consente di ottenere facilmente risultati utili, che potrebbero però essere dimostrati anche senza farne uso.

A.2 Teorie del prim'ordine

In questa sezione ci limitiamo a richiamare alcune definizioni e i teoremi di incompletezza di Gödel. Daremo per scontato che il lettore abbia familiarità con alcuni concetti ad esempio quelli di linguaggio predicativo e teoria del prim'ordine, modello di una teoria, regole di derivazione. Le definizioni sono pensate nella teoria ambiente ZF presentata nella sezione precedente.

Definizione A.2.1
Diamo le seguenti definizioni relative alle teorie del primo ordine:

- Diremo che la teoria T_1 è **interpretabile** nella teoria T_2 sse per ogni simbolo di costante di T_1 esiste una formula chiusa di T_2, per ogni simbolo di funzionale o relazionale di arietà n di T_1 esiste una formula con

n variabili libere di T_2 in modo che risultino vere in T_2 le trascrizioni degli assiomi di T_1 effettuate usando tali formule

- Una teoria si dice **completa** sse per ogni enunciato si ha che o esso è un teorema o lo è la sua negazione

Definizione A.2.2
Una nozione di derivazione per una teoria del prim'ordine si dice:

- **corretta** sse tutte le formule derivabili sono teoremi
- **completa** sse tutti i teoremi sono derivabili
- **consistente** sse in essa non si può derivare $\phi \wedge \neg\phi$

Si dice **scorretta** [**incompleta**, **inconsistente**] sse non è corretta [completa, consistente]

Osservazione A.2.1
Introduciamo una teoria che indicheremo con $\mathcal{Q}$ che ci servirà per enunciare i teoremi di incompletezza di Gödel.
Il linguaggio di tale teoria ha una sola sorta, un simbolo di costante detto zero 0 e tre simboli funzionali: la funzione unaria successore s e le funzioni binarie di prodotto $\cdot$ e somma $+$
Gli assiomi della teoria sono i seguenti:
(Q1) $s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$
(Q2) $s(x) \neq 0$
(Q3) $x = 0 \vee \exists y\,(x = s(y))$
(Q4) $x + 0 = 0$
(Q5) $x \cdot 0 = 0$
(Q6) $x + s(y) = s(x + y)$
(Q7) $x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$

Si tratta di una debole teoria dell'aritmetica, in quanto si può dimostrare che in essa non sono dimostrabili l'associatività e la commutatività dell'addizione.
Osserviamo che la teoria $\mathcal{Q}$ è coerente perché $\mathbb{N}(0, s, +, \cdot)$ ne costituisce un modello.

Teorema A.2.1 (secondo teorema di Gödel)
Se T è una teoria in cui $\mathcal{Q}$ è interpretabile allora la consistenza di T è dimostrabile in T se e solo se T è inconsistente.

Appendice B

Ordinali e cardinali

In questa appendice daremo alcune definizioni ed enunceremo alcuni risultati basilari sugli insiemi ben ordinati, sugli ordinali e i cardinali.

Teorema B.1
Siano A un insieme e ρ una relazione binaria su tale insieme, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. *la relazione ρ è di ordine stretto e la relazione di ordine largo associata gode della proprietà che ogni sottoinsieme non vuoto di A ammette un primo elemento*
2. *la relazione ρ è totale e ogni sottoinsieme non vuoto ammette un elemento minimale*

Definizione B.1
Chiameremo **insieme ben ordinato** una coppia (A, ρ) dove ρ è una relazione di ordine che verifica una delle due condizioni equivalenti del teorema precedente.

Definizione B.2
Sia $(A, <)$ un insieme ben ordinato.

- Il primo elemento di A si indica con 0
- dato $a \in A$, il primo elemento che supera a si dice **successore** e si indica con $a + 1$
- un elemento $0 \neq a \in A$ che non è successore si dice **limite**
- $I \subseteq A$ si dice **segmento iniziale** sse per ogni $a \in I$ e per ogni $b < a$ si ha che $b \in I$

- diremo che due insiemi ben ordinati sono **simili** sse esiste un isomorfismo di insiemi ordinati e in tal caso scriveremo $A \sim B$
- dati A e B insiemi ben ordinati scriveremo $A \preceq B$ sse A è simile ad un segmento iniziale di B
- dati A e B insiemi ben ordinati scriveremo $A \prec B$ sse $A \preceq B$ ma non sono simili
- per ogni $a \in A$ chiamiamo **segmento iniziale relativo ad** a l'insieme

$$I_a := \{x \in A \,|\, x < a\}$$

Teorema B.2 (fondamentale degli insiemi ben ordinati)
Dati due insiemi ben ordinati A e B si ha una ed una sola delle seguenti possibilità:

$$A \prec B \qquad A \sim B \qquad A \succ B$$

Definizione B.3
Sia ρ una relazione binaria sull'insieme A. Diremo che per la coppia (A, ρ) vale il principio di **induzione transfinita** sse

$$\forall S \subseteq A \,[\,[\forall a \in A\,(\,I_a \subseteq S \Rightarrow a \in S\,)] \Rightarrow S = A\,]$$

Si parla di **ricorsione transfinita** per indicare l'uso dell'induzione transfinita abbinata al rimpiazzamento per definire delle funzioni su un insieme ben ordinato assegnando il valore nel primo elemento e riconducendo la definizione della funzione su un generico elemento a quella sui suoi predecessori.

Teorema B.3
In (A, ρ) vale il principio di induzione transfinita se e solo se in (A, ρ) ogni sottoinsieme non vuoto di A ammette un elemento minimale rispetto a ρ.

Veniamo ora al nocciolo di questa appendice che consiste nella definizione di ordinali e cardinali e nella presentazione delle loro principali proprietà.

Definizione B.4
Un insieme si dice **transitivo** sse ogni suo elemento è un suo sottoinsieme.

Definizione B.5
Un insieme si dice **ordinale** sse è transitivo e ben ordinato dalla relazione $\in$.

Teorema B.4
Gli ordinali soddisfano le seguenti proprietà:

- *ogni elemento di un ordinale è un ordinale*
- *dati due ordinali si ha una ed una sola delle seguenti possibilità:*

$$\alpha \in \beta \qquad \alpha = \beta \qquad \beta \in \alpha$$

- *due ordinali simili coincidono*
- *per due ordinali α e β si ha che $\alpha \prec \beta$ se e soltanto se $\alpha \in \beta$*
- *ogni insieme transitivo di ordinali è un ordinale*
- *ogni insieme ben ordinato è simile ad uno ed un solo ordinale.*

Definizione B.6
Indicheremo con 0 l'insieme vuoto visto come ordinale, con 1 il successore di 0 e con ω l'unico ordinale simile all'insieme ben ordinato $(\mathbb{N}, \leq)$

Definizione B.7
Chiameremo **cardinale** un ordinale α tale che per ogni $\beta \in \alpha$ non esiste alcuna $f : \beta \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \alpha$

Teorema B.5
Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

- *L'assioma della scelta*
- *Il teorema del buon ordinamento: ogni insieme ammette una struttura di insieme ben ordinato*

Bibliografia

[BDL] Blass Andreas, Dimitriou M. Ioanna, Löwe Benedict, *Inaccessible Cardinals without the Axiom of Choice* in *Fundamenta Mathematicae 194* pp. 179-189, 2006

[Bou] Bourbaki Nicolas, *Univers*, appendice a *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas. Tome 1: Théorie des Topos*, in *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* 1963-1964 (SGA 4)

[HML] Autori vari, *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam-New York-Oxford, North Holland, 1978

[Je] Jech J. Thomas, *Lectures in Set Theory*, *Lecture Notes in Mathematics 217*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1971

[Mac69] Mac Lane Saunders, *One Universe as a Foundation for Category Theory*, in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, *Lecture Notes in Mathematics 106*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1969, pp. 192-200

[Mac97] Mac Lane Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, New York, Springer-Verlag, 1997

[McL] McLarty Colin, *A Finite Order Arithmetic Foundation for Cohomology*, 2011 `http://arxiv.org/abs/1102.1773`

[Moo] Moore H. Gregory , *Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, development and influence*, New York, Springer-Verlag, 1982

[Mu] Muller F.A., *Sets, Classes and Categories*, in *British Journal for the Philosophy of Science 52* 2001, pp. 539-573, `http://www.projects.science.uu.nl/igg/muller/SetClassCat-BJPS2001.pdf`

[Sol] Solovay Robert, *AC and Strongly Inaccessible Cardinals*, comunicazione personale, Foundations of Mathematics mailing list, 2008 `http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2008-March/012783.html`

[Shu] Shulman A. Michael, *Set Theory for Category Theory*, 2008 `http://arxiv.org/abs/0810.1279v2`

Indice analitico