1) STABILIRE SE LE SEGUENTI FORMULE SONO IN FNP, QUALI SONO LE VARIABILI LIBERE, SE SI TRATTA DI ENUNCIATI (SENZA VARIABILI LIBERE)

a) $\exists x (A(x,y) \wedge B(x))$

b) $(\exists x A(x,y)) \wedge B(x)$

c) $\exists x \exists y A(x,y)$

- FNP: $\varphi = \square_1 x_1 \dots \square_n x_n \psi$, CON $\square_i \in \{\exists, \forall\}$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$, ψ SENZA QUANTIFICATORI
- VARIABILI LIBERE: φ FORMULA $\rightsquigarrow FV(\varphi)$ INSIEME DELLE VARIABILI LIBERE
  - $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$: $FV(\varphi) = Var(\varphi)$
  - $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, $* \in \{\wedge, \vee\}$: $FV(\varphi) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$
  - $\varphi = \neg\varphi'$: $FV(\varphi) = FV(\varphi')$
  - $\varphi = \square x \varphi'$, $\square \in \{\forall, \exists\}$: $FV(\varphi) = FV(\varphi') \setminus \{x\}$
- ENUNCIATO: φ T.C. $FV(\varphi) = \emptyset$

a) FNP, $FV(\varphi) = \{y\} \Rightarrow$ NON ENUNCIATO

b) NO FNP, $FV(\varphi) = \{x, y\} \Rightarrow$ NON ENUNCIATO

c) FNP, $FV(\varphi) = \emptyset \Rightarrow$ ENUNCIATO

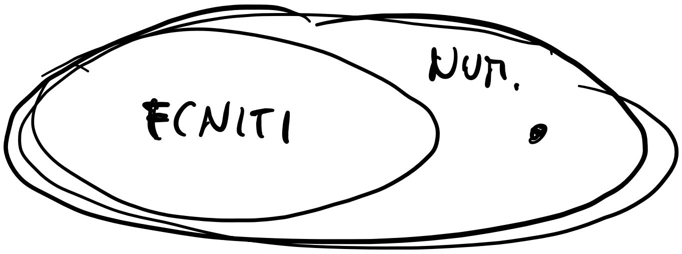
2) ESISTE UN'ASSIOMATIZZ. AL PRIM'ORDINE DEI GRUPPI NUMER.?

(CIOÈ ESISTE Γ INSIEME DI FORMULE IN UN CERTO LINGUAGGIO $\mathcal{L}$ T.C.

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\mathfrak{A}\ \mathcal{L}\text{-STRUTT. T.C. } \mathfrak{A} \models \varphi\ \forall \varphi \in \Gamma\} =$$

$$= \{\text{GRUPPI NUMERABILI}\}\ ?\ )$$

SOL.



LÖW-SKO: SE Γ HA UN MODELLO INFINITO $\Rightarrow$ HA UN MODELLO DI CARDINALITÀ κ, $\forall\ \kappa \geq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} (\geq \aleph_0)$

SE P.A. $\exists\ \Gamma$ T.C.

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\text{GRUPPI NUMERABILI}\}$$
$$\Downarrow$$
$$(\mathbb{Z}, +)$$

Γ HA UN MODELLO INFINITO

SIA $\kappa > \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$

$\overset{\text{LÖW-SKO}}{\Rightarrow}$ $\exists$ MODELLO DI Γ DI CARD. κ $\quad\lightning$

3) U ultrafiltro di $LT_\phi(P) = \text{Form}(P)/\equiv$ — equiv. logica

Si mostri che, dato φ, ψ formule proposizionali con variabili in P,

- A alg. di Boole. $F \subseteq A$ è **filtro** se
  - $1 \in F$
  - $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
  - $x \leq y,\ x \in F \Rightarrow y \in F$
- F filtro è **proprio** se $F \neq A$ (i.e. $0 \notin F$)
- F filtro proprio è **ultrafiltro** se è massimale tra gli ultrafiltri propri (Lemma 3.79 definiz. equivalenti)

Lemma: $S \subseteq A$ sottoins. con la FIP ($\forall a_1, \dots, a_n \in S,\ a_1 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$)
$\Rightarrow \exists F \subseteq A$ filtro proprio t.c. $S \subseteq F$

Teorema ultrafiltro (3.82) $F \subseteq A$ filtro proprio $\Rightarrow \exists$ $U \subseteq A$ **ultrafiltro** t.c. $F \subseteq U$

A alg. di Boole

$x \leq y$ sse $x \wedge y = x$

2) $[\neg\varphi] \in U \Leftrightarrow [\varphi] \notin U$

Sol

$$\boxed{[\neg\varphi] = \neg[\varphi]}$$

- $\neg[\varphi] \in U \Rightarrow [\varphi] \notin U$

  (altrim. $\neg[\varphi] \wedge [\varphi] \in U$ ↯)
  $\qquad\qquad\qquad\quad \| $
  $\qquad\qquad\qquad\quad 0$

- $[\varphi] \notin U$, siccome $\neg[\varphi] \vee [\varphi] = 1 \in U$

  $\overset{U \text{ ultra}}{\Rightarrow} \neg[\varphi] \in U$

b) $[\varphi \wedge \psi] \in U \iff [\varphi] \in U \;\&\; [\psi] \in U$

SOL

$$[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \wedge [\psi]$$

"$\Rightarrow$" $[\varphi] \wedge [\psi] \in U \Rightarrow [\varphi], [\psi] \in U$

$\wedge$

$[\varphi], [\psi]$

"$\Leftarrow$" $[\varphi], [\psi] \in U \Rightarrow [\varphi] \wedge [\psi] \in U$

c) SE $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in U$, ALLORA $[\psi] \in U$

SOL.

$$[\varphi \to \psi] = [\neg \varphi \vee \psi] = \neg[\varphi] \vee [\psi]$$

$[\varphi] \in U$, $\neg[\varphi] \vee [\psi] \in U$

$\cancel{\neg[\varphi] \in U}$ $\quad$ $[\psi] \in U$

(ALTRIM.
$0 = \neg[\varphi] \wedge [\varphi] \in U$)

4) $D(x)$ "X HA I DENTI"

$P(x)$ "X HA IL PANE"

$$\forall x\,(D(x)\to\neg P(x)) \dashv\vdash \forall x\,(P(x)\to\neg D(x))$$

Sol.

$$[P(x)]^1,\quad \forall x\,(D(x)\to\neg P(x)),\quad [D(x)]^2$$

$$E\forall\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$D(x)\to\neg P(x)$$

$$E\to\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\neg P(x)$$

$$E\neg\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\perp$$

$$I\neg_2\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\neg D(x)$$

$$I\to_1\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$P(x)\to\neg D(x)$$

$$I\forall\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\forall x\,(P(x)\to\neg D(x))$$

5) SI STABILISCA SE I SEGUENTI INSIEMI DI FORMULE PROPOSIZ. SONO COERENTI

- Γ COERENTE: $\Gamma \nvdash \perp$ (def 2.57)

  $\Updownarrow$ LEMMA 2.69

- Γ SODDISFACIBILE: ESISTE v VALUTAZ. T.C. $v(\varphi) = 1$ PER OGNI $\varphi \in \Gamma$ (def 2.34)

a) $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\}$

b) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$

<u>SOL.</u>

a) <u>NO</u>

$$
E\neg \; \dfrac{E\!\to\;\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi} \qquad \neg\psi}{\perp}
$$

b) $v(\varphi) = 0 \Rightarrow v(\varphi \to \psi) = 1$

$v(\psi) = 0 \Rightarrow v(\neg\psi) = 1$

6) QUAL È L'ALGEBRA DI BOOLE LIBERA GENERATA DALL'INSIEME VUOTO?

- A ALGEBRA DI BOOLE SI DICE LIBERAM. GENERATA DA $X \subseteq A$ SOTTOINS. SE

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

FUNZIONE $\quad B$ ALGEBRA DI BOOLE

$\exists! \tilde{f}$ OMOMORFISMO DI ALG. DI BOOLE T.C. $\tilde{f}_{|X} = f$

(def 3.33)

- X INSIEME $\rightsquigarrow LT_\phi(X) = \frac{Form(X)}{\equiv}$ È ALGEBRA DI BOOLE LIBERAMENTE GENERATA DA X (TEOREMA BIRKHOFF 3.38)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, bend right] & LT_\phi(X) \\ B & \end{tikzcd}$$

$x \longmapsto [x]$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Form(X) \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ B & LT_\phi(X) \arrow[l, dashed] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall \phi"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

FUNZ. $\quad B$ ALG. DI BOOLE

$\exists! \tilde{f}$ OM. T.C. $\cancel{\tilde{f}_{|\phi} = f}$

$\{*\} \; \cancel{\to} \; B$

$0=1 \longmapsto 0$

$\longmapsto 1$

$\{0,1\} \qquad \forall$ ALG. DI BOOLE B

$\exists! \quad \{0,1\} \longrightarrow B$

$0 \longmapsto 0$

$1 \longmapsto 1$

$$LT_\phi(\{a,b,c,d\}) = 2^{2^4}$$

$$\mathrm{Form}(\{a,b,c,d\})/{\equiv} \;\cong\; \{2^{\{a,b,c,d\}} \to 2\}$$

VALUTAZ.

$$\mathrm{Form}(X)/{\equiv} \xrightarrow[\cong]{\text{SURJ.}} \{2^X \to 2\}$$

$$\varphi \longmapsto f_\varphi : 2^X \longrightarrow 2$$

$$(v : X \to 2) \mapsto v(\varphi)$$

$$f_\varphi = f_\psi$$

7) SIA $\mathcal{A}$ L'ALGEBRA DI BOOLE DEGENERE (È UN SINGOLETTO) MOSTRARE CHE $\nexists$ $S \subseteq \mathcal{A}$ SOTTOINSIEME CHE GENERA LIBERAMENTE $\mathcal{A}$

<u>SOL.</u>

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & \{*\} = \mathcal{A} \arrow[d, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] \\
& B
\end{tikzcd}
\quad \text{T.C.} \ldots
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "c_1"'] & \{*\} = \mathcal{A} \arrow[d, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] \\
& \{0,1\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& * \arrow[dl] \arrow[d] \\
0 & 1
\end{tikzcd}
$$

8) SI TROVI UN INSIEME COERENTE DI ENUNCIATI IN UN LINGUAGGIO AL PRIM'ORDINE SENZA "=" T.C. OGNI MODELLO ABBIA CARDINALITÀ ALMENO 2

(SE CI FOSSE "=": $\exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2))$)

SSE AMMETTE UN MODELLO (COMPLETEZZA)

SOL.

P IN $\mathcal{L}$ DI ARIETÀ 1

$\Gamma = \{ \exists x P(x), \exists x (\neg P(x)) \}$

$\mathfrak{A}$ MODELLO DI Γ:

$\mathfrak{A} \models \exists x P(x)$, CIOÈ ESISTE $\underline{a \in A}$ T.C. $\mathfrak{A}, v[a/x] \models P(x)$, CIOÈ $a \in P^{\mathfrak{A}}$

$\mathfrak{A} \models \exists x (\neg P(x))$, CIOÈ ESISTE $\underline{a' \in A}$ T.C. $\mathfrak{A}, v[a'/x] \models \neg P(x)$, CIOÈ $a' \notin P^{\mathfrak{A}}$

$\Rightarrow |A| \geq 2$

9) SI MOSTRI CHE IL KERNEL DI UN OMOMORFISMO $f: A \to B$ È UN FILTRO E CHE È PROPRIO SSE B NON È UN SINGOLETTO

OMOMORFISMO: • $f(x * y) = f(x) * f(y)$, $* \in \{\wedge, \vee\}$

• $f(\neg x) = \neg f(x)$

$(\Rightarrow f(0) = 0,\ f(1) = 1)$

$\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$

Sol $\ker f \subseteq A$

• $1 \in \ker f$ ✓ $(f(1) = 1)$

• $\underbrace{a, a' \in \ker f}_{f(a) = f(a') = 1} \Rightarrow a \wedge a' \in \ker f$ ✓

$(f(a \wedge a') = f(a) \wedge f(a') =$
$= 1 \wedge 1 = 1)$

• $\underbrace{a \leq a'}, \underbrace{a \in \ker f}_{f(a) = 1} \Rightarrow a' \in \ker f$ ✓

$(f(a') = f(a' \vee a) =$
$= f(a') \vee f(a) =$
$= f(a') \vee 1 = 1)$

PROPRIO $\Leftrightarrow \ker f \neq A$

$\Leftrightarrow 0 \notin \ker f$

$\Leftrightarrow f(0) \neq 1$, $f(0) = 0$

$\Leftrightarrow B \neq \{*\}$

10) QUALI ALGEBRE DI BOOLE AMMETTONO ALMENO UN ULTRAFILTRO?

Sol.

$\{1\} \subseteq A$ È FILTRO

È PROPRIO $\Leftrightarrow A \neq \{*\}$

$\underline{A \neq \{*\}}$: $\exists\, U \subseteq A$ ULTRAFILTRO
(CHE ESTENDE $\{1\}$)

$\underline{A = \{*\}}$: NON HO ULTRAFILTRI
(PERCHÉ NON HO FILTRI
PROPRI: HO SOLO $\{1\}$)

11) $f, g : A \to B$ omomorfismi di algebre di Boole

Sia $f \vee g : A \to B$

$x \longmapsto f(x) \vee g(x)$

È omomorfismo di algebre di Boole?

Sol.

- $\vee$: $(f\vee g)(x \vee y) = f(x\vee y) \vee g(x \vee y) =$

$$= (f(x) \vee f(y)) \vee (g(x) \vee g(y)) =$$

$$= (f(x) \vee g(x)) \vee (f(y) \vee g(y)) =$$

$$= (f \vee g)(x) \vee (f\vee g)(y)$$

- $\wedge$: $(f \vee g)(x \wedge y) = f(x \wedge y) \vee g(x \wedge y) =$

$$= (f(x) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge g(y)) =$$

$$= (f(x) \vee g(x)) \wedge (f(y) \vee g(x)) \wedge (f(x) \vee g(y)) \wedge$$

$$\wedge (f(y) \vee g(y)) =$$

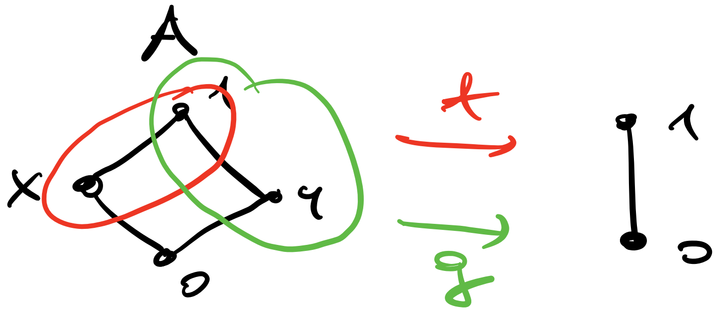
$$= (f \vee g)(x) \wedge \_\_ \quad \_\_ \wedge (f \vee g)(y)$$

- $\neg$: $(f \vee g)(\neg x) = f(\neg x) \vee g(\neg x) =$

$$= \neg f(x) \vee \neg g(x) =$$

$$= \neg(f(x) \wedge g(x))$$

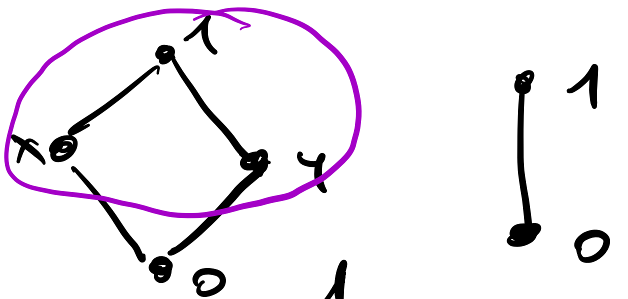
$$\neq \neg(f(x) \vee g(x)) = \neg(f \vee g)(x)$$



$$f: \begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ x &\mapsto 1 \\ y &\mapsto 0 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$g: \begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ x &\mapsto 0 \\ y &\mapsto 1 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$f \vee g$



$$f \vee g: \begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ x &\mapsto 1 \\ y &\mapsto 1 \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

NON È OMOMORFISMO

12) SI MOSTRI CHE OGNI FILTRO PROPRIO È L'INTERSEZIONE DEGLI ULTRAFILTRI CHE LO ESTENDONO

SOL

CLAIM. $F \subseteq A$ FILTRO PROPRIO

$$F = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(A) \\ F \subseteq U}} U$$

"$\subseteq$" OK

"$\supseteq$" $x \in \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(A) \\ F \subseteq U}} U$. SE $x \notin F \Rightarrow$ ~~$\neg x \in F$~~

VOGLIO TROVARE $\bar{U} \in \mathcal{U}(A)$ T.C. $F \subseteq \bar{U}$ MA $x \notin \bar{U}$ ($\Leftrightarrow \neg x \in \bar{U}$)

$\underbrace{F \cup \{\neg x\}}$ $\subseteq A$ FIP ?

$\forall f_1, \ldots, f_n \in F$

$$\underbrace{f_1 \wedge \ldots \wedge f_n}_{\substack{\mathbin{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ F}} \wedge \neg x \neq 0$$

$$\boxed{\forall f \in F, \quad f \wedge \neg x \neq 0}$$

(SE $f \wedge \neg x = 0 \Leftrightarrow f \leq x \Rightarrow x \in F$)

$\Rightarrow \exists\ \bar{U}$ ULTRAFILTRO t.c. $F \cup \{\neg x\} \subseteq \bar{U}$