1) SIA $f: A \to B$ FUNZIONE TRA ALGEBRE DI BOOLE CHE PRESERVA $0, 1, \vee, \wedge$. È OMOMORFISMO DI ALGEBRE DI BOOLE ?

Sol.

SUFF. $\vee, \wedge, \neg$

$$f(\neg x) = \neg f(x)$$

$$f(\neg x) \wedge f(x) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$f(\underbrace{\neg x \wedge x}) = f(0) = 0 \quad ✓$$

$$f(\neg x) \vee f(x) = 1$$

$$\shortparallel$$

$$f(\neg x \vee x) = f(1) = 1 \quad ✓$$

2) $f : A \to B$ funzione tra reticoli (insiemi parzial. ordinati per cui esistono inf e sup) t.c.

$$x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

È vero che f preserva $\wedge$ e $\vee$?

Sol.

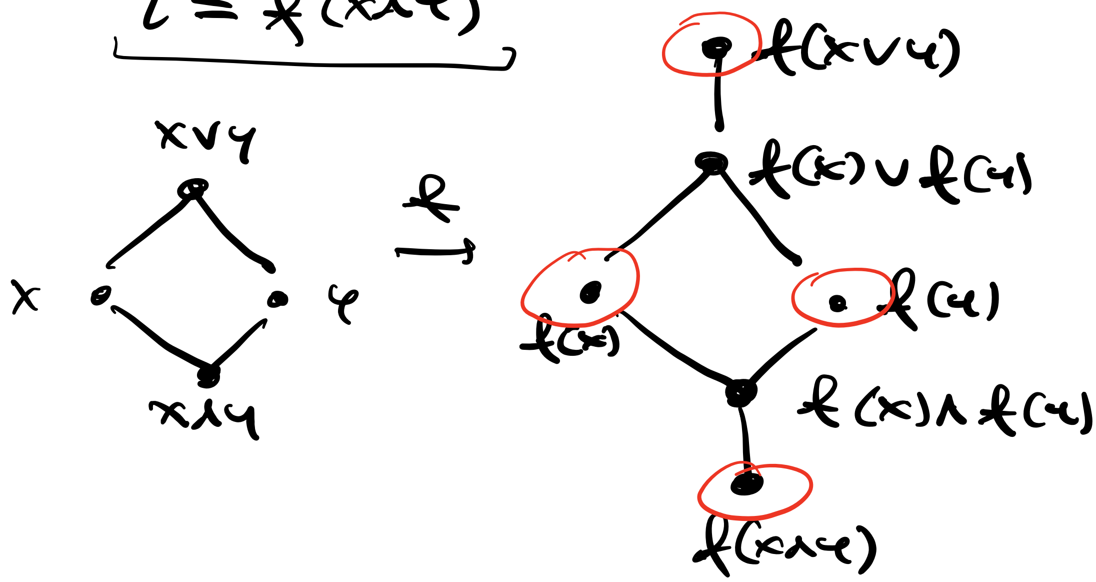
$$\begin{matrix} & x & & y \\ & \vee\!/ & & \vee\!/ \\ f(& x \wedge & & y &) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \le f(x) \\ \le f(y) \end{matrix}$$

$$\underline{f(x \wedge y)} \le f(x) \wedge f(y)$$

$$\ge \, ?$$

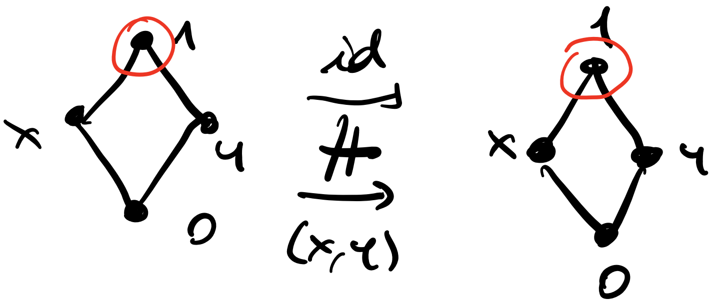
$t \in B$ t.c. $t \le f(x)$ e $t \le f(y)$

$$\underline{t \le f(x \wedge y)}$$



3) $f, g : A \to B$ OMOMORFISMI DI ALGEBRE DI BOOLE t.c. $\ker f = \ker g$.

È VERO CHE $f = g$?



$\ker id = \{1\} =$

$= \ker (x,y)$

4) Si mostri che, per ogni algebra di Boole B, esiste un'algebra di Boole **libera** A e un omomorfismo suriettivo $f: A \to B$

<u>Sol.</u>

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\text{funzione}"] \arrow[dr, "\forall g \text{ funzione}"'] & \mathrm{Free}(X) = A \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

$\exists! f$ omom. di alg. di Boole t.c. $f|_X = g$

B alg. Boole

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook] \arrow[dr, equal, "id_B \text{ funzione}"'] & \mathrm{Free}(B) = A \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

B visto come insieme

B alg. di Boole

$\exists! f$ omom. di alg. di Boole t.c. $f|_B = id_B$

$f(b) = b$

f suriettiva

5) $R(x) \vdash \forall x R(x)$?

Sol.

$$R(x) \nvdash \forall x R(x) \qquad\qquad \vdash \iff \models$$

$$\Updownarrow$$

$$R(x) \not\models \forall x R(x)$$

TROVO $\mathcal{A}, v$ t.c.

$$\mathcal{A}, v \models R(x)$$

$$\mathcal{A}, v \not\models \forall x R(x)$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$R^{\mathcal{A}} = \{0\}$$

$$v(x) = 0$$

- $\mathcal{A}, v \models R(x)$ sse $0 = v(x) \in R^{\mathcal{A}} = \{0\}$ ✓
- $\mathcal{A}, v \models \forall x R(x)$ sse per ogni $a \in A$, vale

$$\mathcal{A}, v[a/x] \models R(x) \quad \text{sse}$$

$$a = v[a/x](x) \in R^{\mathcal{A}} = \{0\}$$

per $a = 1$ non vale

6) $f: A \to B$ FUNZIONE TRA ALGEBRE DI BOOLE CHE PRESERVA $\neg$ E $\vee$. MOSTRARE CHE f È OMOMORFISMO DI ALGEBRE DI BOOLE

Sol.

$$f(x \wedge y) \qquad\qquad f(x) \wedge f(y)$$

DE MORGAN $\quad \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel \quad$ DE MORGAN

$$f(\neg(\neg x \vee \neg y)) = \neg(\neg f(x) \vee \neg f(y))$$

7) MOSTRARE CHE LA COMPOSIZIONE DI OMOMORFISMI (DI ALGEBRE DI BOOLE) È OMOMORFISMO (DI ALGEBRE DI BOOLE)

Sol. f, g om.

$f \circ g$ om.:

- $(f \circ g)(\neg x) = f(g(\neg x)) = f(\neg g(x)) =$
  $= \neg f(g(x)) =$
  $= \neg (f \circ g)(x)$

- $(f \circ g)(x \vee y) = f(g(x \vee y)) =$
  $= f(g(x)) \vee f(g(y)) =$
  $= (f \circ g)(x) \vee (f \circ g)(y)$

8) MOSTRARE CHE LA FUNZIONE INVERSA DI UN ISOMORFISMO È ISOMORFISMO

(ISOMORFISMO = OMOMORFISMO BIETTIVO)

SOL.

$f : A \longrightarrow B$ OM. BIETTIVO

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ FUNZ. BIETTIVA

- $f^{-1}(\neg b) = f^{-1}(\neg f(a)) = f^{-1}(f(\neg a)) = \neg a =$
  $= \neg f^{-1}(b)$

  $\left(\exists!\ a \in A \text{ t.c. } b = f(a) \atop f^{-1}(b) = a \right)$

- $f^{-1}(b_1 \vee b_2) = f^{-1}(f(a_1) \vee f(a_2)) = f^{-1}(f(a_1 \vee a_2))$
  $= a_1 \vee a_2 = f^{-1}(b_1) \vee f^{-1}(b_2)$

  (COME PRIMA a_1, a_2)

9) Si consideri il linguaggio dei gruppi $(+, 0, -) \cup \{=\}$

a) $Th(\{(\mathbb{Q},+)\}) = Th(\{(\mathbb{Z},+)\})$?

b) Esiste un gruppo G t.c. $Th(\{G\}) = Th(\{\text{gruppi}\})$?

c) $Th(\{\text{gruppi ab. finiti}\}) = Th(\{\text{gruppi ciclici}\})$?

d) $\mathbb{Z} \in Mod(Th(\{\text{gruppi ciclici finiti}\}))$?

Sol.

$\mathcal{L}$ $\qquad \{\mathcal{L}\text{-strutt.}\}$ classe

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{L}\text{-strutt.}\} \\ \cup\!| \\ K \end{array}$$

K classe di $\mathcal{L}$-strutt.

$$Th(K) = \{\varphi \text{ enunciato} \mid \mathfrak{A} \models \varphi \ \forall \mathfrak{A} \in K\}$$

Γ insieme di enunciati per $\mathcal{L}$

$$Mod(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in \{\mathcal{L}\text{-strutt.}\} \mid \mathfrak{A} \models \varphi \ \forall \varphi \in \Gamma\}$$

a) NO: $(\mathbb{Q},+) \models \forall x \exists y (y+y=x)$

$(\mathbb{Z},+) \not\models$

Oss. • $K \subseteq K' \subseteq \{\mathcal{L}\text{-strutt.}\}$

$Th(K') \subseteq Th(K)$

- $\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq \{\mathcal{L}\text{-ENUNCIATI}\}$

$Mod(\Gamma') \subseteq Mod(\Gamma)$

b) G GRUPPO

$\{G\} \subseteq \{GRUPPI\} \subseteq \{\mathcal{L}\text{-STRUTTURE}\}$

$\underbrace{Th(\{GRUPPI\})} \subseteq Th(\{G\})$

$\supseteq$?

- RIESCO A TROVARE φ T.C.

φ — $G \models \varphi$, CIOÈ $\varphi \in Th(\{G\})$

— $G \not\models \varphi \Leftrightarrow G \models \neg\varphi$, CIOÈ $\neg\varphi \in Th(\{G\})$

$\varphi, \neg\varphi \notin Th(\{GRUPPI\})$?

SÌ: $\varphi = \forall x \forall y (x+y = y+x)$

c) $\forall x \forall y \big(((x+x=0) \land (y+y=0) \land \neg(x=0) \land \neg(y=0)) \to x=y \big) \in Th(\{G.C.\})$

$\notin Th(\{G.A.F.\})$

GRUPPO DI KLEIN

NEI GRUPPI CICLICI HO AL PIÙ UN ELEMENTO x t.c. $x+x=0$

d) $\mathbb{Z} \in Mod(Th(\{G.C.F.\}))$?

$\Updownarrow$

$Th(\{\mathbb{Z}\}) \supseteq Th(\{G.C.F.\})$

$n \in \mathbb{N}$: $\quad c_n := \neg(\underbrace{x + \_\_ + x}_{n\text{-volte}} = 0)$

$G, \ g = V(x) \in G \ \rightsquigarrow \ \mathbb{Z} \longrightarrow G$

$i \longmapsto g^i$

OMOMORFISMO DI GRUPPI

$$\Gamma := \underbrace{Th(\{G.C.F.\})}\cup\underbrace{\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

Γ È FINITAM. SODD.

SE $\Delta \subseteq \Gamma$ FINITO,

$$\Delta = \{\overbrace{\phi_1,\dots,\phi_t}^{Th(\{G.C.F.\})\ \supseteq}\}\cup\{c_{n_1},\dots,c_{n_s}\}$$

p PRIMO T.C. $p > n_i \ \forall i = 1,\dots,s$

$\mathbb{Z} \models \phi_j \ \forall j = 1,\dots,t$

$\rightsquigarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \models c_{n_i} \ \forall i = 1,\dots,s$

COMPATT. $\Rightarrow \exists\, G$ t.c. $G \models \Gamma \supseteq Th(\{G.C.F.\})$

$(\Rightarrow G \in Mod(Th(\{G.C.F.\})))$

c'è ν t.c.

$G,\nu \models c_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$,

$g := \nu(x) \in G$ $\quad \underline{ng \neq 0}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow G$$
$$n \longmapsto ng$$

- MORFISMO DI GRUPPI
- SURJ.
- INJ.

$\mathbb{Z} \leq G$ SOTTOGR.

$\Rightarrow \mathbb{Z} \in Mod(Th(\{G.C.F.\}))$

10) SIA $\mathcal{L}$ LINGUAGGIO VUOTO. ALLORA

$$Th(\{\text{STRUTTURE}\}) = Th(\{\text{STRUTTURE FINITE}\})$$

SOL

$$Th(\{\text{STRUTTURE}\}) \subseteq Th(\underbrace{\{\text{STRUTT. FINITE}\}}_{\text{NON ASS. AL PRIMO ORD.}})$$

$\supseteq$?

$$\mu_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{i<j} \neg (x_i = x_j) \right)$$

$$\Gamma := Th(\{S.F.\}) \cup \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

È FINITAM. SODD.

$\overset{\text{COMP.}}{\Longrightarrow}$ Γ SODD., CIOÈ $\exists\ \mathcal{M} \models \Gamma$

$$\begin{cases} \mathcal{M} \in Mod(Th(\{S.F.\})) \\ \\ \mathcal{M} \models \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ CIOÈ } \mathcal{M} \text{ INFINITO} \end{cases}$$

$\Rightarrow Th(\{S.F.\})$ HA UN MODELLO INFINITO

$\overset{\text{LOW SKO}}{\Longrightarrow}$ HA UN MODELLO PER OGNI CARDINALE $k \geq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} = \aleph_0$ $(\mathcal{M}_k)$

$X \in \{\text{STRUTTURE}\}$, CIOÈ X INSIEME

$$\Longrightarrow X \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\{S.E.\}))$$

VERO, PERCHÉ

X FINITO ✓

X INFINITO $(|X| = k) \Rightarrow \exists\, k \geq \aleph_0$ T.C.

$$X \xrightarrow{f} \Pi_k \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\{S.E.\}))$$

BIIETTIVA

$\Downarrow$

È ISO. DI STRUTTURE

$(\mathcal{L} = \emptyset)$

11) LA CLASSE DEI GRUPPI PRIVI DI TORSIONE NON È FINITAM. ASSIOMATIZZ. (4.78)

Sol.

$K = \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma})$ e K è FINITAM. ASSIOM.
($\exists\, \Gamma'$ FINITO t.c. $K = \mathrm{Mod}(\Gamma')$)
$\Rightarrow \exists\, \Delta \subseteq \Gamma$ FINITO t.c. $K = \mathrm{Mod}(\Delta)$

$n \in \mathbb{N}$: $NT_n := \forall x (\neg(x=1) \to \neg(x^n = 1))$

$$\Gamma := \underbrace{\begin{Bmatrix} \text{ASSIOMI} \\ \text{DI GRUPPO} \end{Bmatrix}}_{\text{FINITO}} \cup \{NT_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \begin{Bmatrix} \text{GRUPPI PRIVI} \\ \text{DI TORSIONE} \end{Bmatrix}$$

$\overset{\text{FINITAM. ASS.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \Delta \subseteq \Gamma$ FINITO t.c.

$$\mathrm{Mod}(\Delta) = \{G.P.T.\}$$

$$\Delta = \{ \_\_ \} \cup \{NT_{n_1}, \ldots, NT_{n_s}\}$$

$p > \max\{n_i\}_{i=1}^{s}$ NUMERO PRIMO

$\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \in \mathrm{Mod}(\Delta)$, MA $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \notin \{G.P.T.\}$

12) $f, g : A \to B$ omomorfismi di algebre di Boole suriettivi t.c. $\ker f = \ker g$. Mostrare che $\exists\, \varphi : B \to B$ isomorfismo di algebre di Boole t.c. $\varphi f = g$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\varphi'", "\cong"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[ddr, "g"'] & & A/\ker f \arrow[d, equal] \\
 & & A/\ker g \\
 & B \arrow[ur, "\cong", "\varphi''"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \varphi := (\varphi'')^{-1} \varphi'$