PRIMO APPELLO DI MATEMATICA I (2018/19)

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 17/1/19.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Dimostrare che per ogni $n > 3$

$$n! > 2^n$$

Soluzione: Per $n = 4$ l'affermazione è di facile verifica: $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 > 2^4 = 16$. Supponiamo ora che l'affermazione valga per n e dimostriamola per $n + 1$.

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Dove abbiamo usato l'ipotesi induttiva nel secondo passaggio e il fatto che se $n > 3$ allora $n + 1 > 3$ nel penultimo passaggio.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite

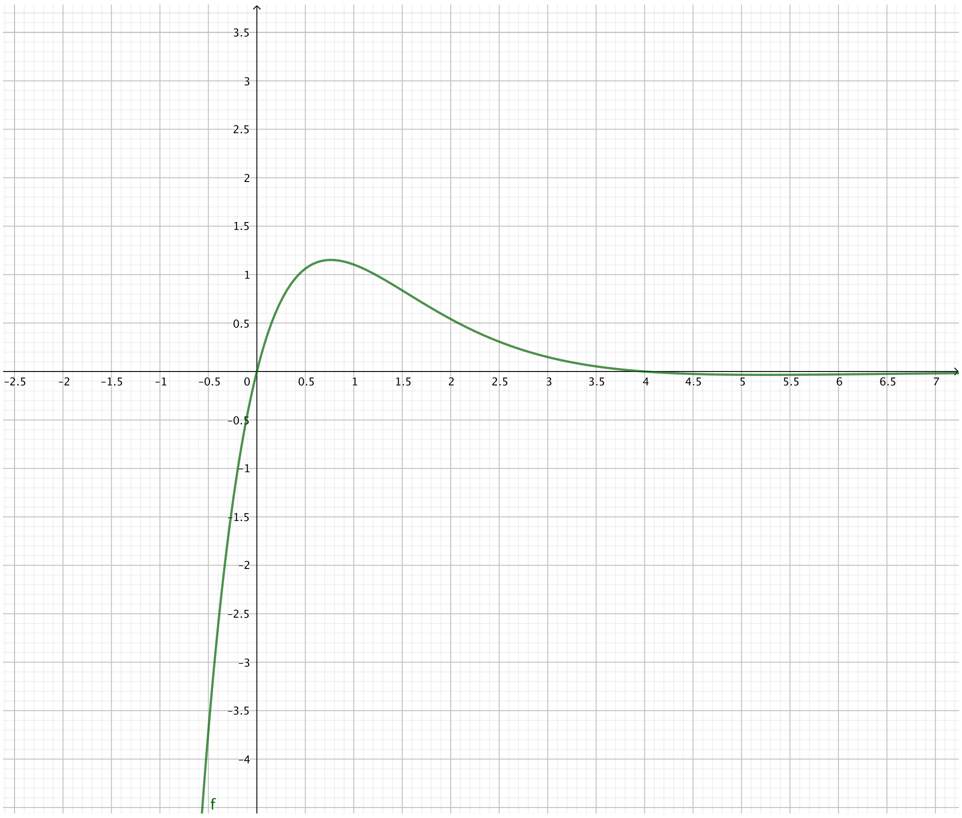
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} e^{(\cos x)^{\log(\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x\to 0} e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x}} = \\ &= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{1}{2\cos x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione

$$(4x - x^2)e^{-x}$$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3.5
−4
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
f

Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}dx$$

Soluzione: Innanzitutto operiamo la seguente sostituzione: $2x = t^6$, da cui $x = \frac{t^6}{2}$ e $dx = 3t^5$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}dx = \int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)}dt = \int \frac{3t^2}{(t^2+1)}dt =$$

$$= 3\int 1 - \frac{1}{(t^2+1)}dt = 3t - 3\arctan(t) + c =$$

$$3\sqrt[6]{2x} - 3\arctan(\sqrt[6]{2x}) + k$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}.$$

Soluzione: Poiché la serie è termini non negativi possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n5^n}{(n+1)5^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)5} = \frac{1}{5}.$$

Quindi la serie converge.