ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
10/04/2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.

(4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Si consideri un mazzo di 40 carte napoletane (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi).

(1) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere?
(2) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 assi?
(3) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 carte di uguale valore?

Motivare le risposte.

Soluzione:

(1) I possibili insiemi di 5 carte sono dati dalle scelte di 5 su 40 (senza ripetizioni), quindi $\binom{40}{5} = (40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36)/5! \approx 658.000$
(2) Un insieme di 5 carte contenente 4 assi è completamente determinato dall'unica carta che non è un asso, poiché esse sono 36, ci sono 36 possibili insiemi.
(3) Si ragiona come nel caso precedente, ma questa volta il valore delle quatto carte uguali può essere uno qualsiasi tra 1 e 10, quindi ci sono 10 possibili valori e per ogni valore ci sono 36 possibilità. Il numero totale dei possibili insiemi è dunque 360.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data le seguente funzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\log(1-\frac{1}{3}x)}}{\operatorname{sen}(x^2-1)}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

Dom(f)=____

- Calcolare la derivata di $f(x)$.

$f'(x)$=____

Soluzione:

$$\begin{cases} 1-\frac{1}{3}x > 0 \\ \log(1-\frac{1}{3}x) \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x^2-1) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 0 \\ x^2-1 \neq k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{1+k\pi} \text{ per } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Quindi il dominio è $[0,3) \setminus \{1, \sqrt{1+\pi}, \sqrt{1+2\pi}\}$.

La derivata è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{2\left(\sqrt{-\log(1-\frac{1}{3}x)}\right)\cdot(1-\frac{1}{3}x)\cdot 3} + 2x\cos(x^2-1)\cdot\sqrt{-\log(1-\frac{1}{3}x)}}{\operatorname{sen}^2(x^2-1)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x^2-1) + (12x-4x^2)\cos(x^2-1)(\log(1-\frac{1}{3}x))}{(6-2x)\operatorname{sen}^2(x^2-1)\left(\sqrt{-\log(1-\frac{1}{3}x)}\right)}. \end{aligned}$$

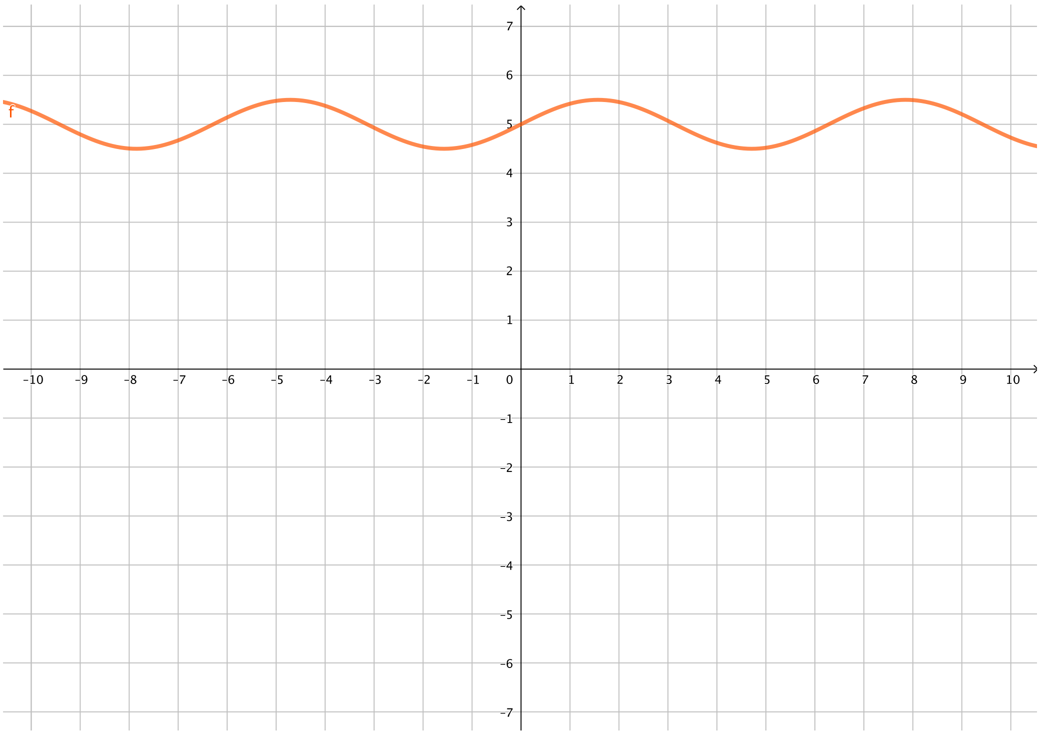
Esercizio 3 (5 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

Soluzione:

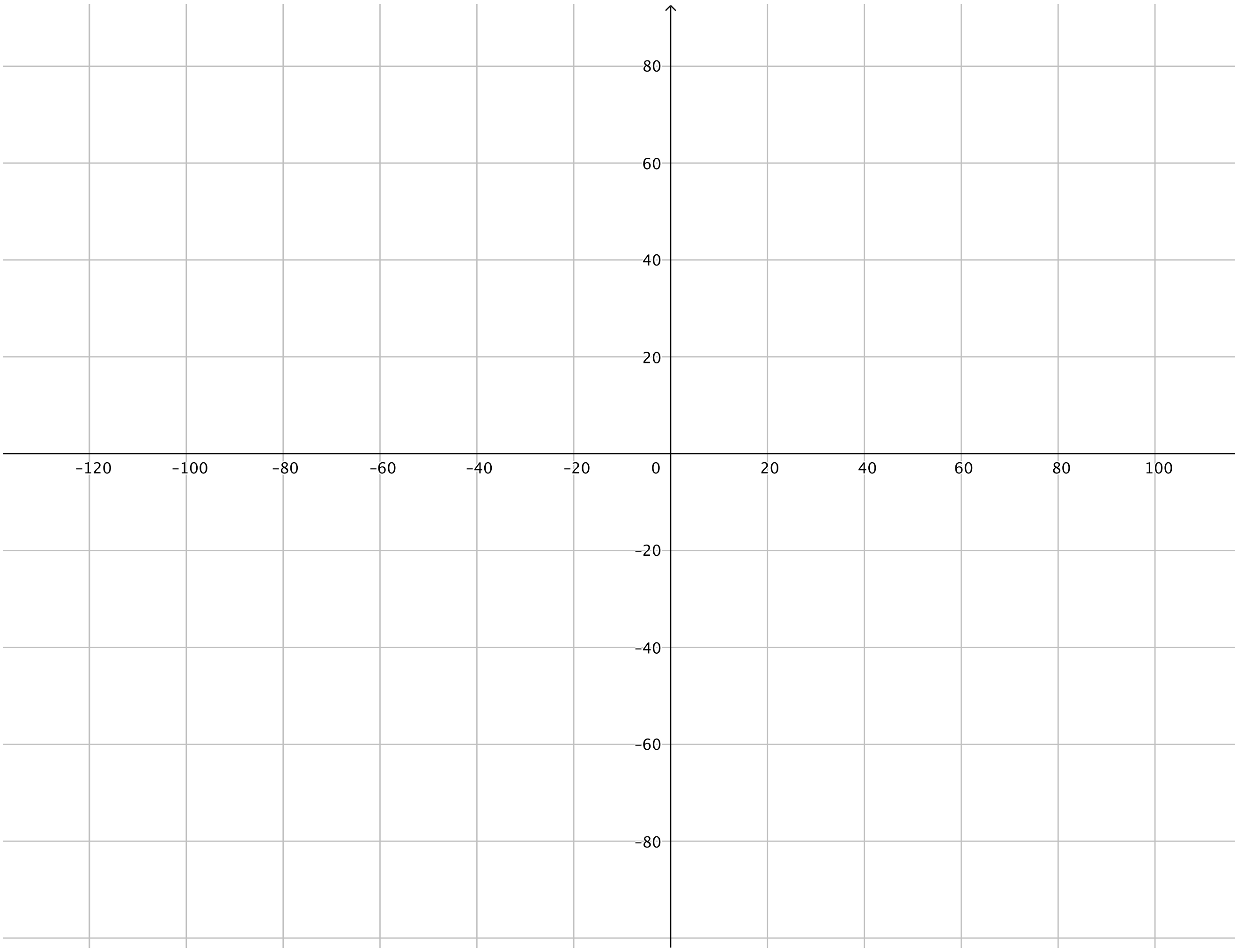
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 4 (4 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

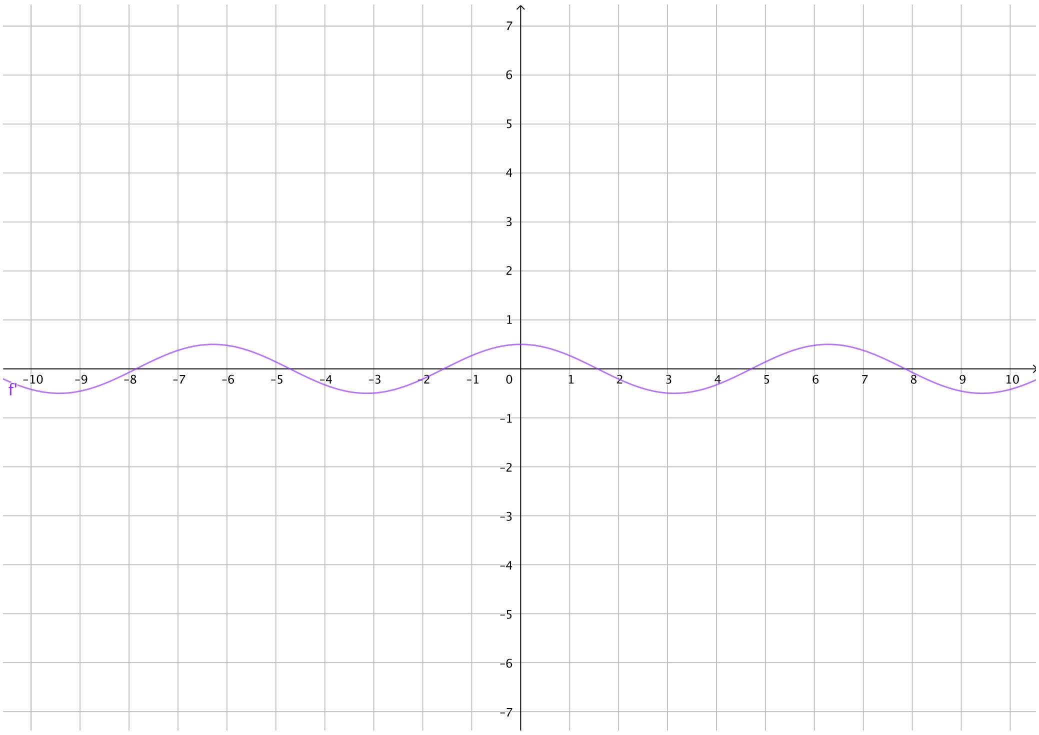


.

Disegnarne la derivata

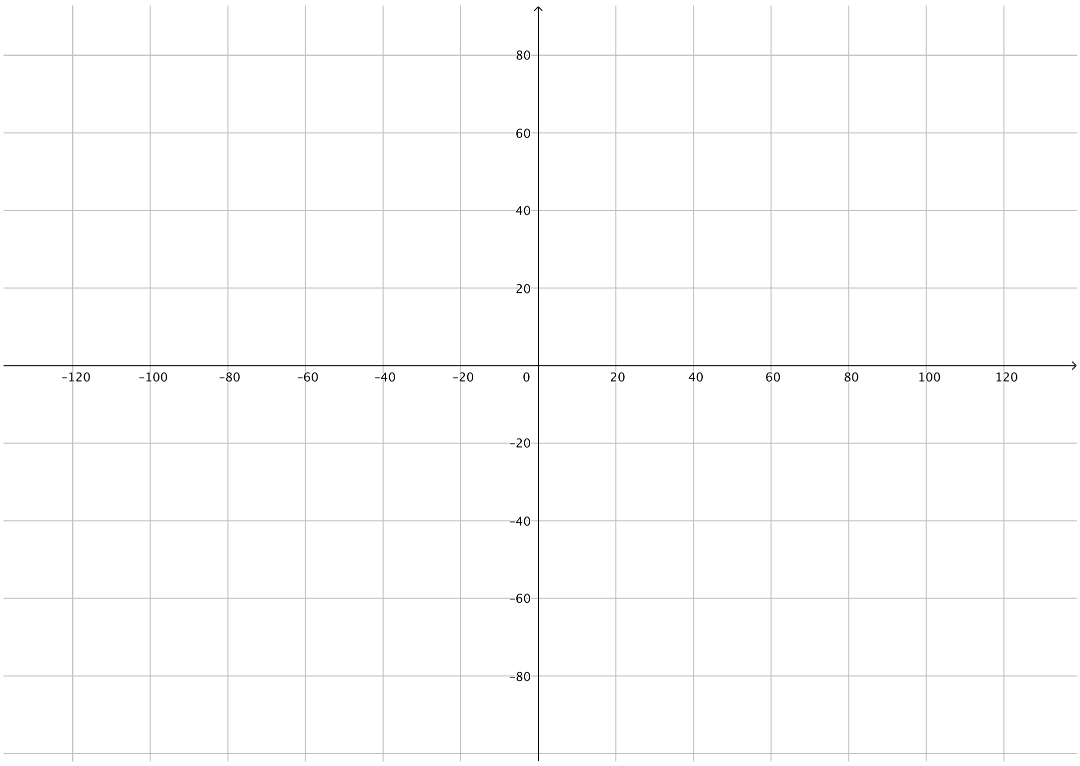


Soluzione:



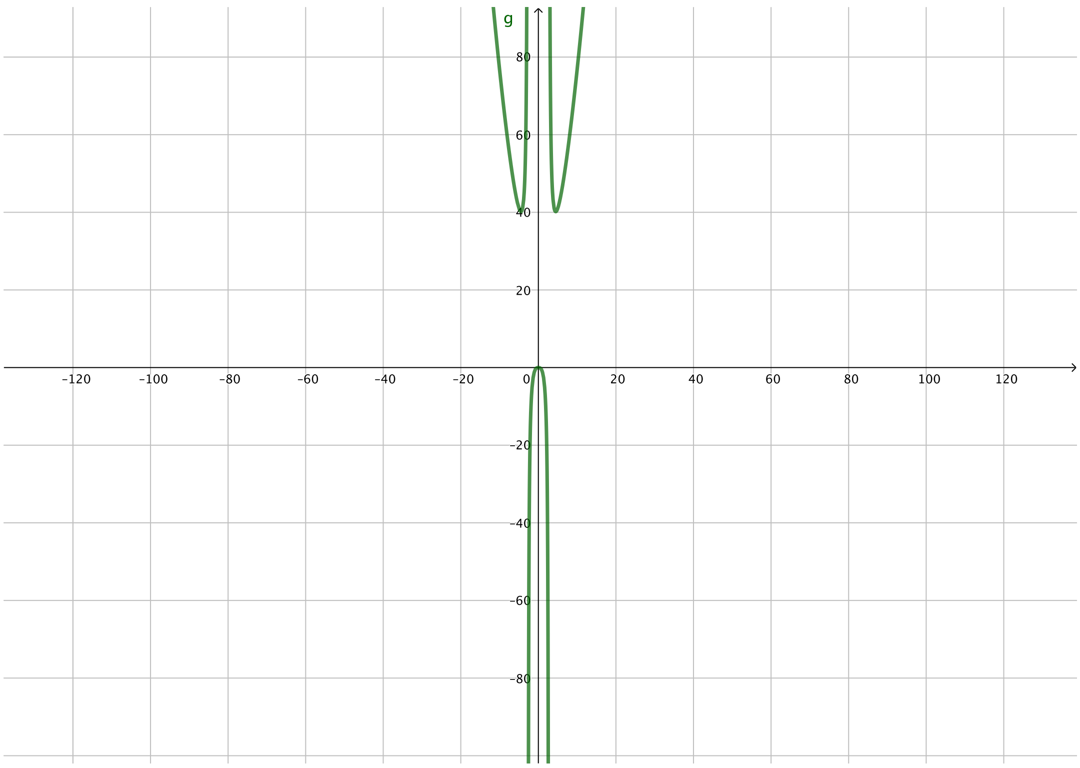
Esercizio 5 (6 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione (il logaritmo è naturale):

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$



Soluzione: Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{-e, 0, e\}$. La funzione è pari, quindi basta studiarla per con $x > 0$.

La derivata per $x > 0$ è $f'(x) = \frac{2x(\log(x)-1)-x}{(\log(x)-1)^2} = \frac{x(\log(x)-3)}{(\log(x)-1)^2}$. Quindi ci sono punti di minimo locale a $x = \pm e^{3/2}$.



Esercizio 6 (4 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(1,2,3),(1,0,0),(0,3,1) \text{ e } (2,6,2).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di C.

Soluzione:

(1) I vettori sono linearmente dipendenti perché in $\mathbb{R}^3$ quattro vettori sono necessariamente linearmente dipendenti.

(2)

$$C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) La matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante 0, mentre la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ ha determinante 4 quindi la matrice C ha rango 2.

Esercizio 7 (5 punti)**.** Si stabilisca per quali valori di k il seguente sistema ha soluzioni e per quali valori ha soluzioni non banali.

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2w = 0 \\ x - z - w = 0 \\ -kx + z + 2w = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema è omogeneo quindi ammette sempre soluzioni. La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \text{-1} & \text{-2} \\ 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} \\ \text{-k} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \text{-2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che se $k = 2$ il determinante di A è nullo perché la prima e l'ultima colonna sono linearmente dipendenti. Volendo si può anche procedere con il metodo di Laplace scegliendo l'ultima riga. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & \text{-1} & \text{-2} \\ 1 & \text{-1} & \text{-1} \\ \text{-k} & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \text{-2} \\ 1 & 0 & \text{-1} \\ \text{-k} & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2(k-2) - 3(k-2) \\ &= -5(k-2) \end{aligned}$$

Quindi per $k = 2$ il sistema ammette soluzioni non banali.