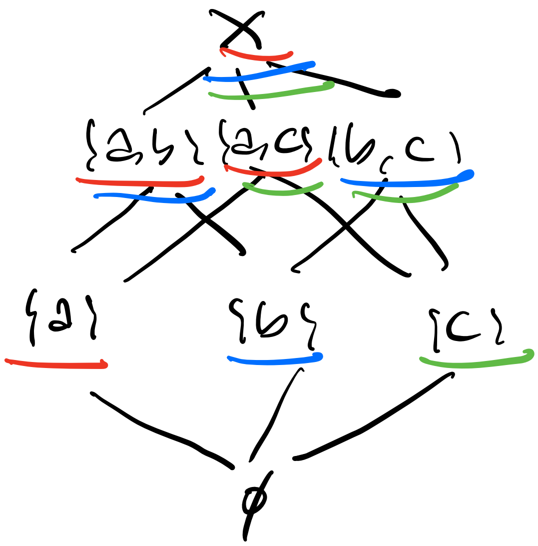
1) DISEGNARE UN'ALGEBRA DI BOOLE CON 8 ELEMENTI. INDIVIDUARE TUTTI I SUOI ULTRAFILTRI

Sol.

$$|A| = 8 \qquad A \cong \mathcal{P}(X)$$

$$|X| = 3 \qquad X = \{a, b, c\}$$



free(Y)

$$LT_{\phi}(Y) = \text{free}(Y)$$

$$|\text{free}(Y)| = 2^{2^{|Y|}}$$

2) Descrivere l'algebra di Boole Free({x,y})

<u>Sol</u>

Free({x})

$$|Free(\{x,y\})| = 2^{2^{2}} = 16$$

su

$LT_\phi(X)$ $\qquad \mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$

[x]

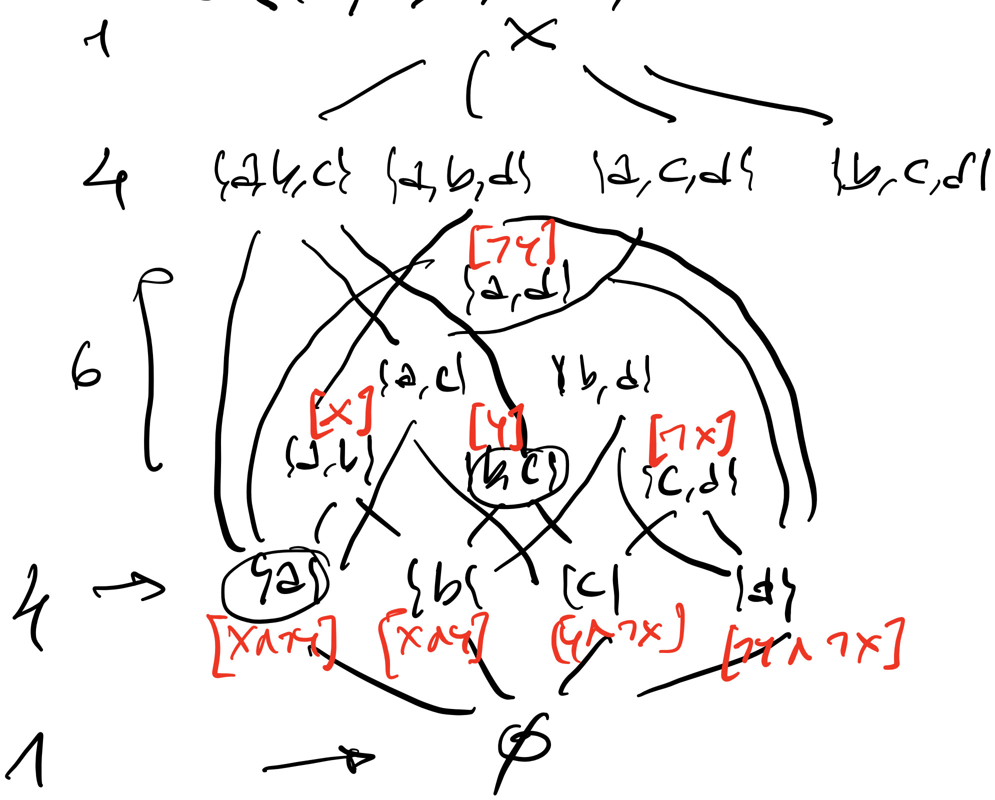
[y]

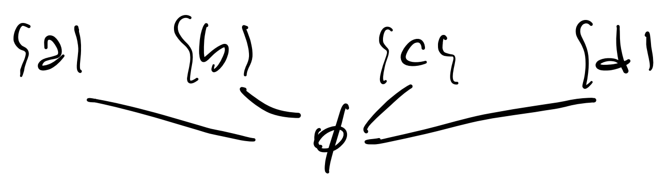
[x]∧[y]

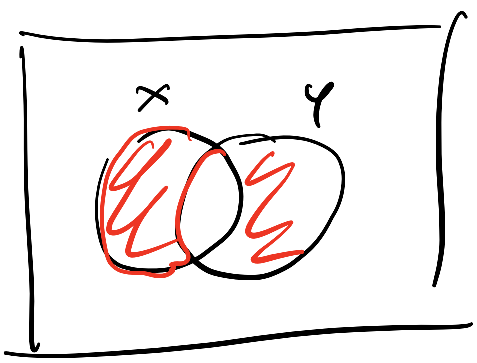
=

[x∧y]

[0]







3) X insieme di variabili, $v : X \to \{0,1\}$ valutaz.
mostrare che $\Sigma_v := \{\varphi \in Form X \mid v(\varphi) = 1\}$ è un insieme di formule ~~massimalmente coerente~~

(Σ massimalmente coerente := coerente e massimale tra i coerenti, cioè, data $\varphi \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\varphi\}$ è incoerente)

PROP. 2.66
- $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma$
- $\neg\varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi \notin \Sigma$
- $\varphi \wedge \psi \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi$ e $\psi \in \Sigma$

Sol.

Coerente?
sì: $v(\varphi) = 1$
$\forall \varphi \in \Sigma_v$

Coerente: $\Sigma \nvdash \bot$
$\Updownarrow$ compl.
$\Sigma \not\models \bot$
esiste v t.c.
$v(\varphi) = 1 \ \forall \varphi \in \Sigma$
~~e t.c. $v(\bot) = 0$~~

Massim. coerente?
[$\varphi \notin \Sigma_v \Leftrightarrow v(\varphi) = 0 \Leftrightarrow v(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow \neg\varphi \in \Sigma_v$]

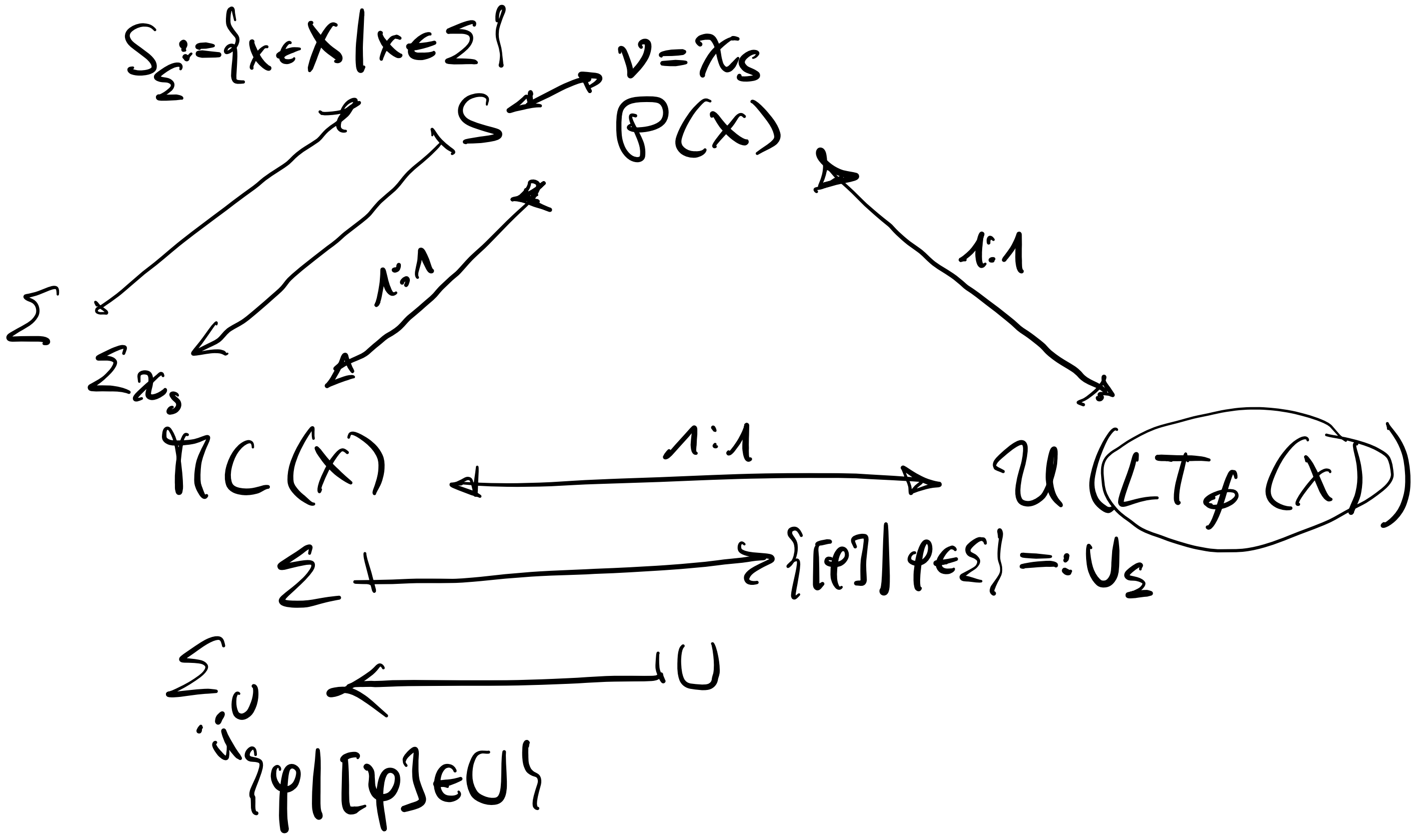
Voglio dim. $\Sigma_v \cup \{\varphi\}$ incoerente
$$\overset{\neg\varphi}{\wedge}$$

$\tilde{v}$ valutazione
se $\tilde{v}(\varphi) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\neg\varphi) = 0$
se $\tilde{v}(\neg\varphi) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\varphi) = 0$

4) X insieme di variabili proposizionali. Mostrare che i seguenti insiemi sono in biiezione

- $\mathcal{P}(X)$
- $\{\Sigma \subseteq Form(X) \mid \Sigma \text{ è massimalmente coerente}\} =: MC(X)$
- $\{U \subseteq LT_\phi(X) \text{ ultrafiltro}\} = \mathcal{U}(LT_\phi(X))$

<u>Sol.</u>



5) FARE UN ESEMPIO DI ALGEBRA DI BOOLE A, $B \subseteq A$ SOTTOALGEBRA, $E \subseteq B$ SOTTOINSIEME T.C.

- E HA SUP. IN A
- E NON HA SUP. IN B

SOL

E INFINITO

$$A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
$$\cup\!\mid$$
$$B = \mathcal{P}_{\substack{fin\\cof}}(\mathbb{N})$$
$$\cup\!\mid$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \supseteq E = \left\{ Y \;\middle|\; \begin{matrix} Y \subseteq \mathbb{P} \\ Y \text{ FINITO} \end{matrix} \right\}$$

PARI

$$\bigcup_{Y \in E} Y = \mathbb{P}$$

$$\sup_A E = \bigcup_{Y \in E} Y = \mathbb{P}$$

$$B \ni \sup_B E \supseteq \bigcup_{Y \in E} Y = \mathbb{P} \notin B$$

$\nexists$ MINIMO DEI MAGGIORANTI

$X \in B$, X MAGGIORANTE DI E $(X \supseteq \mathbb{P})$

$\Rightarrow X = \mathbb{N} \setminus \{d_1, \dots, d_k\}$ $\quad d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$

$\Rightarrow \exists\, d \in X \cap (\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}) \Rightarrow X \setminus \{d\} \overset{\in B}{\subsetneq} X$, MAGG. DI E

6) FARE UN ESEMPIO DI ALGEBRA DI BOOLE A, $B \subseteq A$ SOTTOALGEBRA, $E \subseteq B$ SOTTOINSIEME T.C.

- E NON HA SUP. IN A
- E HA SUP. IN B

$\exists$ SUP $\to$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$\nexists$ SUP $\quad A = \mathcal{P}_{\substack{fin\\cof}}(\mathbb{N}) = \{Y \subseteq \mathbb{N} \mid Y \text{ FINITO}\} \cup \{Y \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N}\setminus Y \text{ FINITO}\}$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$\exists$ SUP $\to$ $B = \left\{Y \subseteq \mathbb{N} \,\middle|\, \begin{matrix} Y \subseteq \mathbb{P} \\ Y \text{ FINITO}\end{matrix}\right\} \cup \underbrace{\left\{Y \subseteq \mathbb{N} \,\middle|\, \begin{matrix} \mathbb{N}\setminus\mathbb{P} \subseteq Y \\ \mathbb{N}\setminus Y \text{ FINITO}\end{matrix}\right\}}_{\ni \mathbb{N}}$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$E = \left\{Y \subseteq \mathbb{N} \,\middle|\, \begin{matrix} Y \subseteq \mathbb{P} \\ Y \text{ FINITO}\end{matrix}\right\}$$

- $\nexists \sup_A E$
- X MAGGIORANTE DI E IN B
  - $X \supseteq \mathbb{P}$ (X MAGG. DI E)
  - $X \supseteq \mathbb{N}\setminus\mathbb{P}$ (X IN B)

$\Rightarrow X = \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup_B E = \mathbb{N}$

Definizione 4.42

Una **teoria** è un insieme di formule chiuse T, tale che ogni formula da esso deducibile vi appartiene. In simboli: se $T \vdash \varphi$, allora $\varphi \in T$.

Un insieme $\Delta \subseteq T$ tale che $T = \{\varphi \mid \Delta \vdash \varphi\}$ è detto **insieme di assiomi** per T. Diremo anche che T è assiomatizzata da Δ.

Definizione 4.44

Sia T una teoria nel linguaggio $\mathcal{L}$ e S una teoria in un linguaggio $\mathcal{L}'$. Diremo che

1. S è un'**estensione** di T se $T \subseteq S$ e $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.
2. S è un'**estensione conservativa** di T se:
   a) $T \subseteq S$ e
   b) per ogni formula φ nel linguaggio $\mathcal{L}$ si ha che $\varphi \in T$ se e soltanto se $\varphi \in S$.

7) LA TEORIA DEI GRUPPI S, $\mathcal{L}' = (1, \cdot, ^{-1})$ È UN'ESTENS. CONSERVATIVA DELLA TEORIA DEI MONOIDI T, $\mathcal{L} = (1, \cdot)$?

SOL.

φ ENUNCIATO

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$
$T \subseteq S$

$$\varphi \in T \iff \varphi \in S$$

"$\Rightarrow$" SEMPRE VERA

$\Leftarrow$? NO:

- $S \overset{\models}{\vdash} \varphi := \forall x \exists y ((x \cdot y = 1) \land (y \cdot x = 1))$] NEI GRUPPI OGNI ELEM. HA INVERSO
- $T \overset{\not\models}{\nvdash} \varphi$] CI SONO MONOIDI CON ELEMENTI SENZA INVERSO

8) Γ_1, Γ_2 TEORIE DI UNO STESSO LINGUAGGIO $\mathcal{L}$ T.C., PER OGNI $\mathcal{L}$-STRUTTURA $\mathfrak{A}$, SI HA

$$\mathfrak{A} \models \Gamma_1 \iff \mathfrak{A} \not\models \Gamma_2$$

SI MOSTRI CHE Γ_1 E Γ_2 SONO FINITAMENTE ASSIOMATIZZ.

Sol.

P.A. Γ_1 NON F.A.:

SEMPRE VERA

$$\boxed{\text{F.A.}: \ \exists \Delta \subseteq \Gamma_1 \text{ FINITO T.C. } Mod(\Delta) \overset{\supseteq}{=} Mod(\Gamma_1)}$$

$\forall \Delta \subseteq \Gamma_1$ FINITO $\exists \mathfrak{A}_\Delta$ $\mathcal{L}$-STRUTT. T.C.

$$\underline{\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta}, \text{ MA } \mathfrak{A}_\Delta \not\models \Gamma_1$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathfrak{A}_\Delta \models \underline{\Gamma_2}$$

$$\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta \cup \Gamma_2$$

$\Rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ FINITAM. SODD.

$\Sigma \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ FINITO

$\Sigma_1 = \Sigma \cap \Gamma_1$

$\Sigma_2 = \Sigma \cap \Gamma_2$

$$\Sigma = \underbrace{\overset{\Gamma_1}{\overset{\cup|}{\Sigma_1}}}_{\text{FINITO}} \cup \Sigma_2$$

$$\mathfrak{A}_{\Sigma_1} \models \Sigma_1 \cup \Gamma_2$$
$$\models \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$$

COMP. $\Rightarrow$ $\exists \mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-STRUTT. $\mathfrak{A} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ↯

9) MOSTRARE CHE OGNI FILTRO PROPRIO F CHE NON È ULTRAFILTRO È CONTENUTO IN ALMENO DUE ULTRAFILTRI DIVERSI

SOL.

[U FILTRO PROPRIO È ULTRA $\Leftrightarrow \forall x \quad x \in U$ o $\neg x \in U$

$$U_1 \neq U_2$$
$$\text{VI} \quad \text{//}$$
$$F \leftarrow \exists x \text{ t.c. } x \notin F \text{ e } \neg x \notin F$$
$$\Rightarrow U_1 \supseteq F \cup \{\neg x\} \neq U_2 \supseteq F \cup \{x\}$$

[F FILTRO PROPRIO, $\neg x \notin F$ ($x \notin F$) $\Rightarrow \exists U$ ULTRAF. $F \cup \{x\} \subseteq U$

$F \cup \{\neg x\}$

$F \cup \{x\}$ HA LA FIP

$\forall f_1 \dots f_n \in F$

$\underbrace{f_1 \wedge \dots \wedge f_n}_{f \in F} \wedge x \neq 0$

$\forall f \in F \quad f \wedge x \neq 0$

SE NON AVESSE FIP

$\exists f \in F$ t.c. $f \wedge x = 0$

$\Leftrightarrow f \wedge \neg x = f \Leftrightarrow f \leq \neg x$

$f = f \wedge 1 = f \wedge (x \vee \neg x) = \cancel{(f \wedge x)} \vee (f \wedge \neg x)$

F FILTRO $\Rightarrow \neg x \in F$

10) Σ INSIEME MASSIMALE COERENTE DI FORMULE. MOSTRARE CHE PER OGNI φ, ψ FORMULE

$$\varphi \to \psi \in \Sigma \iff \psi \in \Sigma \text{ o } \varphi \notin \Sigma$$

PROP 2.66

- $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma$
- $\neg\varphi \in \Sigma \iff \varphi \notin \Sigma$
- $\varphi \wedge \psi \in \Sigma \iff \varphi$ e $\psi \in \Sigma$

SOL

"$\Rightarrow$"

- $\varphi \notin \Sigma$ OK
- SE $\varphi \in \Sigma$, ALLORA, DA $\overset{\Sigma}{\varphi}, \overset{\Sigma}{\varphi \to \psi} \vdash \psi$, SI HA $\Sigma \vdash \psi \Rightarrow \psi \in \Sigma$

"$\Leftarrow$"

- SE $\psi \in \Sigma$, ALLORA, SICCOME $\psi \vdash \varphi \to \psi$, SI HA $\Sigma \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \varphi \to \psi \in \Sigma$
- SE $\varphi \notin \Sigma$, ALLORA $\neg\varphi \in \Sigma$. SICCOME $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$, ALLORA $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ $\Rightarrow \varphi \to \psi \in \Sigma$