ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
14/02/2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.

(4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** In una corsa con 10 concorrenti,

(1) quanti differenti ordini d'arrivo sono possibili?
(2) quanti differenti ordini d'arrivo dei primi 3 corridori sono possibili?
(3) quanti differenti ordini d'arrivo dei primi 3 corridori sono possibili, senza considerare il loro ordine?

Motivare le risposte.

Soluzione:

(1) In una corsa con 10 concorrenti, i possibili ordini d'arrivo sono le permutazioni di 10 elementi. Il loro numero è: $10! = 3.628.800$.
(2) In una corsa di 10 concorrenti, il numero dei possibili gruppi differenti formati dai primi 3 all'arrivo, tenendo conto anche del loro ordine, sono le possibili scelte ordinate e senza ripetizioni di 3 elementi da 10, cioè: $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!} = 720$.
(3) In una corsa di 10 concorrenti, i possibili gruppi dei primi 3 concorrenti senza ordine e senza ripetizioni, sono le possibili scelte non ordinate e senza ripetizioni di 3 elementi da 10,, cioè: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data le seguente funzione.

$$f(x) = \sqrt{(\log(x) - 1)\,\mathrm{sen}^2(x)}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

Dom(f)=____

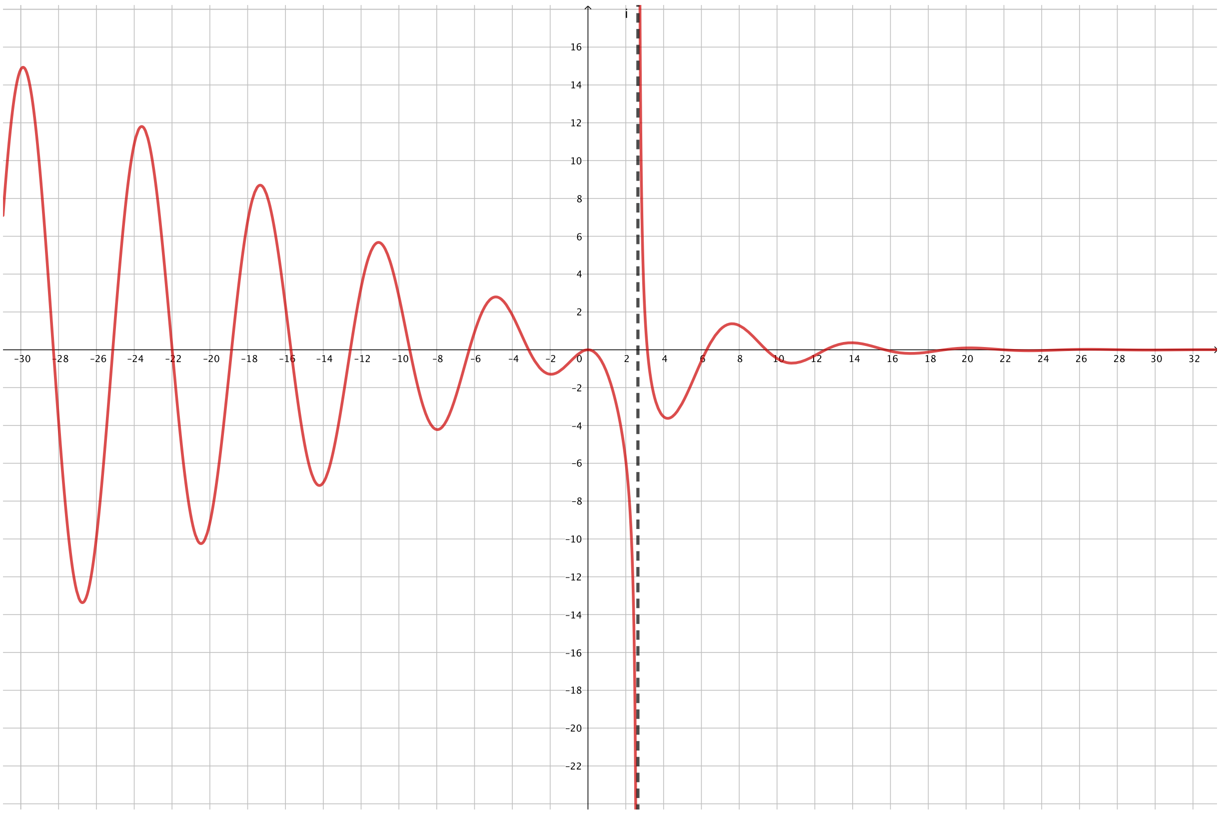
- Calcolare la derivata di $f(x)$.

$f'(x)$=____

Soluzione: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq e\}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x} + 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)(\log(x) - 1)}{2(\log(x) - 1)\,\mathrm{sen}^2(x)}$$

Esercizio 3 (4 punti)**.** Sia f la funzione descritta dal grafico qui sotto:

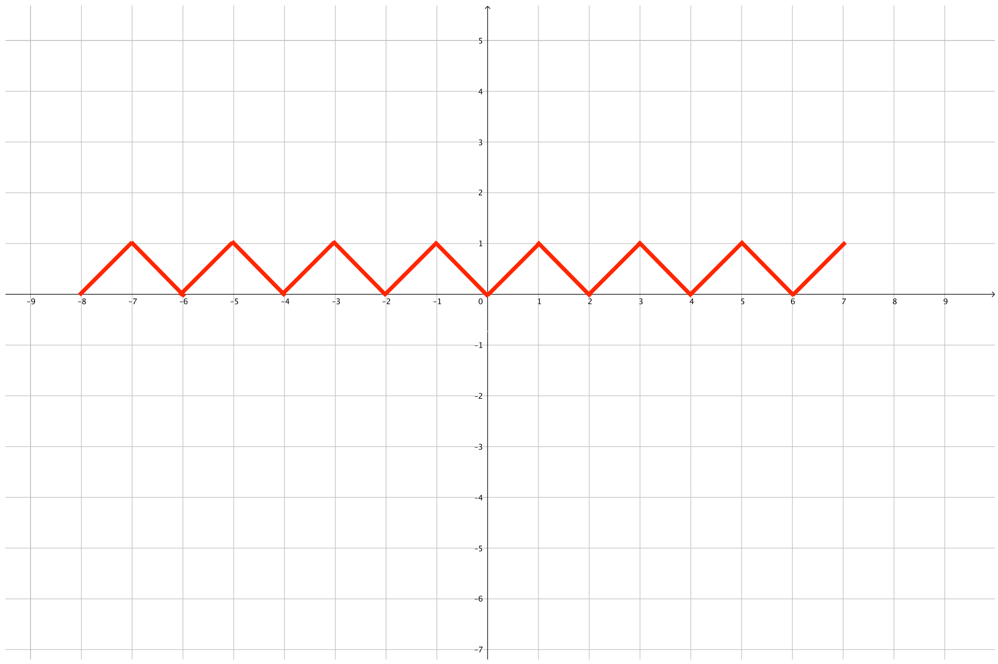


Indicare i seguenti limiti:

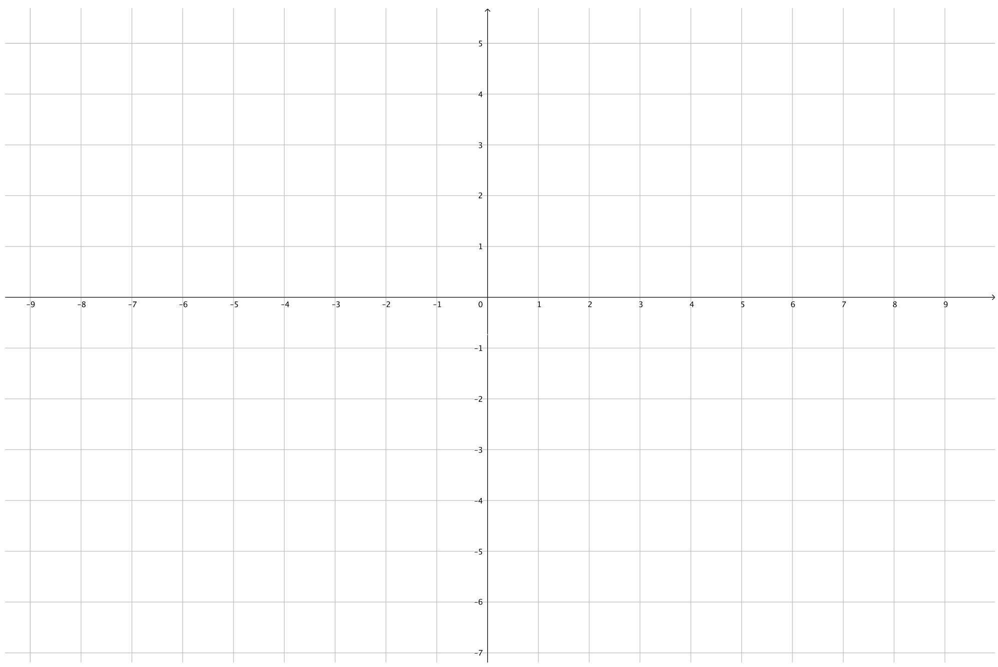
- $\lim_{x\to 0} f(x) =$ ______
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ ______
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ ______
- $\lim_{x\to 2.3} f(x) =$ ______

Soluzione: 0, non esiste,0, Non esiste.

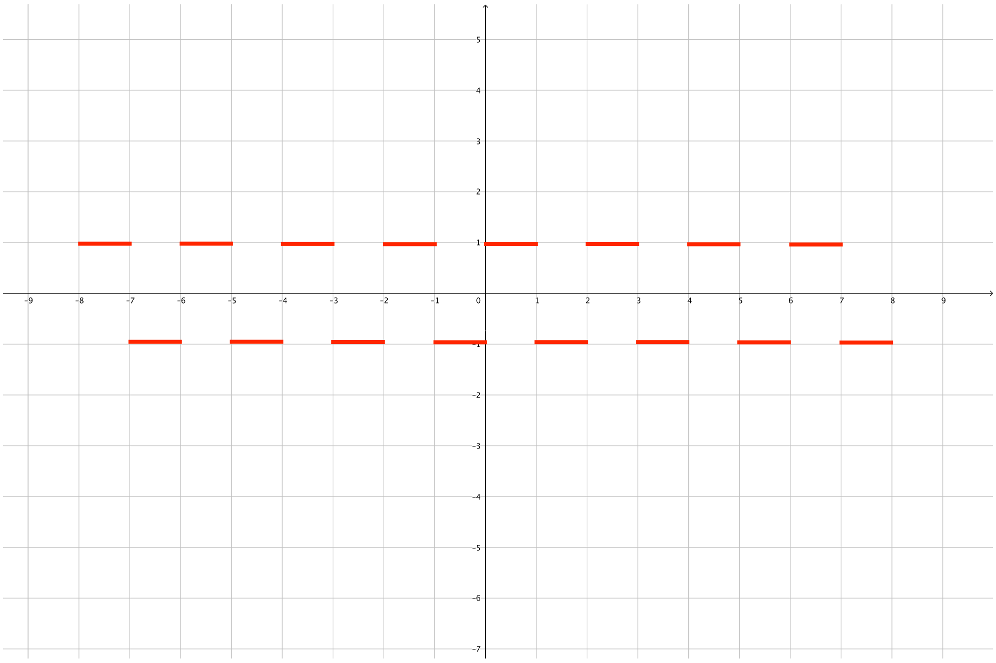
Esercizio 4 (4 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$



Disegnarne la derivata

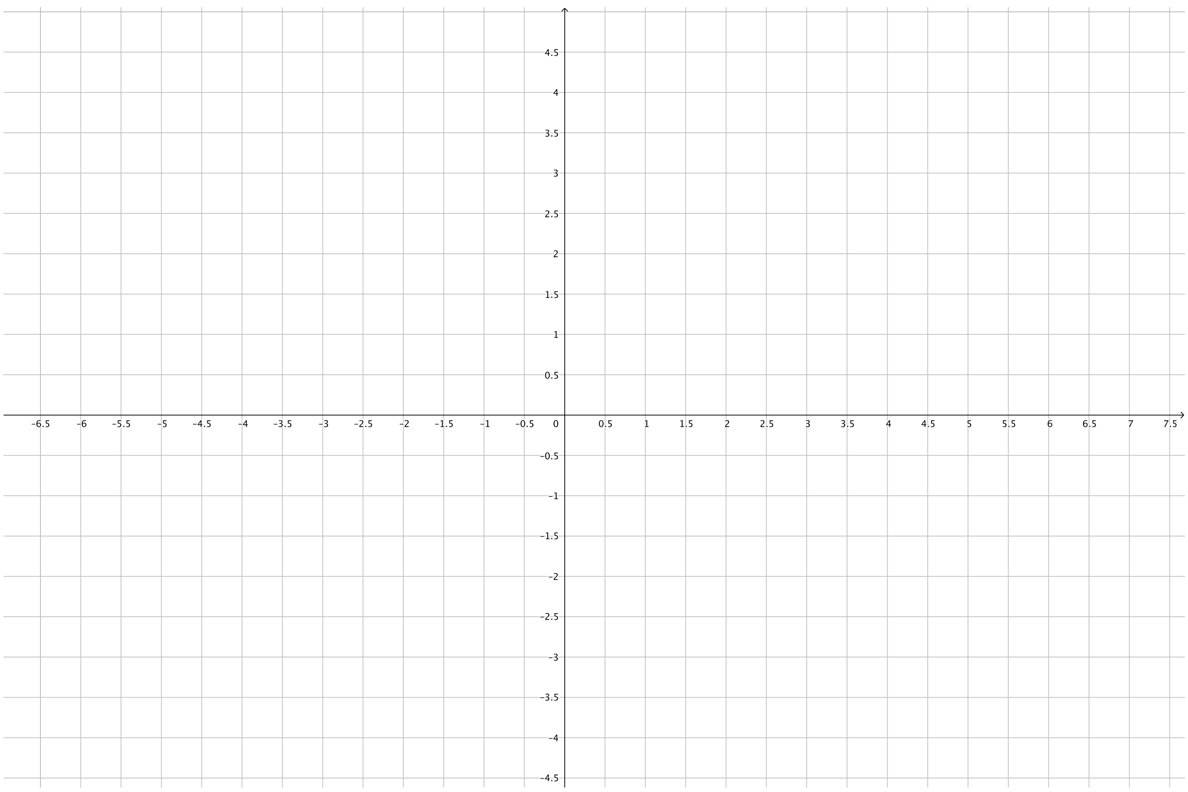


Soluzione:

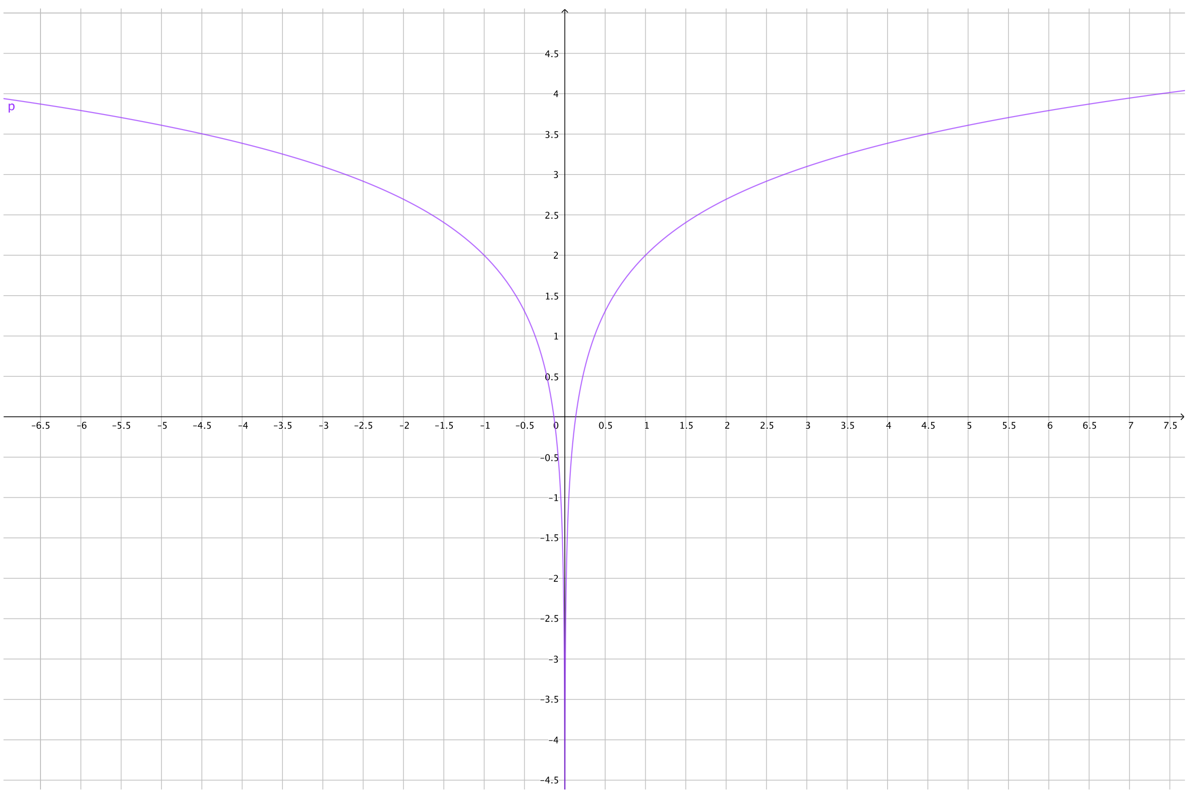


Esercizio 5 (5 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = 2 + \log(|x|)$$



Soluzione:



Esercizio 6 (5 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(0, 1, 1), (1, 1, 0) \text{ e } (2, 1, -1).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di C.

Soluzione:

(1) I vettori sono linearmente dipendenti perché

$$2(1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (2, 2, 0) - (0, 1, 1) = (2, 1, -1).$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$ Quindi il rango è 3.

Esercizio 7 (7 punti)**.** Diagonalizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Gli autovettori sono $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 2, 0)$. Dunque la matrice diagonale simile a quella data è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$