SECONDO APPELLO INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2016/17)

14/02/2017

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari, ma non testi contenenti esserci svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ il numero $n^2 + n$ è pari.

Soluzione: Per il passo base abbiamo $1^2 + 1 = 2$ che è pari. Ora supponiamo che $k^2 + k$ sia pari, quindi uguale a $2p$ per qualche $p \in \mathbb{N}$ e mostriamo che lo è anche $(k+1)^2 + k + 1$. Sviluppando il quadrato otteniamo:

$$(k+1)^2 + k + 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1) = 2p + 2(k+1) = 2(p + k + 1),$$

quest'ultimo è ovviamente pari.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Risolvere il seguente limite

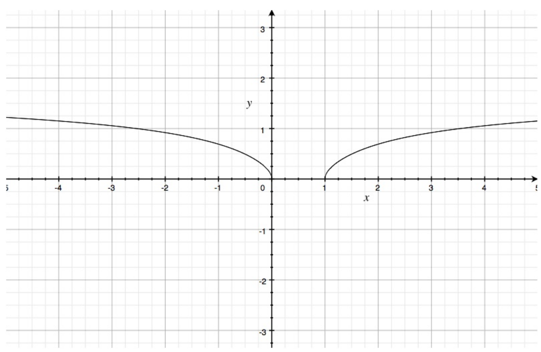
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \cos(x)}{x^2}$$

Soluzione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\log \cos(x)}{x^2} \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\log[1 + (\cos(x) - 1)]}{\cos(x) - 1} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -1/2$$

Esercizio 3 (9 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (non è necessario studiare la convessità):

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}$$



Soluzione:

- La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è maggiore o uguale a 1. $\mathtt{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$.
- La funzione è definita positiva. Si annulla per $x = 0$ e $x = 1$.
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)} = +\infty$.
- $f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}(x^2 - x + 1)}$. Il denominatore è sempre positivo, perciò $f'(x)$ è negativa fino a $1/2$ e positiva oltre $1/2$. Non c'è minimo perché $1/2$ è escluso dal dominio.

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle x e la funzione $f(x) = (x - 1)\log(x^2 + 4)$, nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione: Poiché nell'intervallo [0,1] la funzione è negativa, l'area cercata è uguale a $\int_1^0 (x-1)\log(x^2+4)dx$. Cominciamo integrando per parti

$$\int (x-1)\log(x^2+4)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\log(x^2+4) - \int \frac{(x-1)^2}{2}\frac{2x}{x^2+4}dx =$$
$$= \frac{(x-1)^2}{2}\log(x^2+4) - \int \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+4}dx$$

Per risolvere l'ultimo integrale dividiamo il numeratore per il denominatore, ottenendo

$$\int \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+4}dx = \int x-2+\frac{-3x+8}{x^2+4}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 8\int \frac{1}{x^2+4}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}\log(x^2+4) + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + k$$

Svolgendo i calcoli l'area richiesta è

$$2\log 4 - \frac{3}{2}\log 5 + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{3}{2}.$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+n+1/4}$$

Soluzione: La serie è a termini alternati. Poiché $n^2+n+1/4 = (n+1/2)^2$ la successione è ovviamente decrescente e infinitesima, quindi la serie converge.