SECONDO APPELLO DI MATEMATICA I (2018/19)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 7/2/19.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Calcolare le seguenti radici in $\mathbb{C}$

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$$

Soluzione: Innanzitutto portiamo il numero $c = 1 + i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica. Otteniamo $\rho = 2$ e $\theta = \pi/3$, dunque $c = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right))$. Ora applichiamo la formula di De Moivre per estrarre le radici quarte di c.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\
c_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\\
c_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)\\
c_4 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

Soluzione:

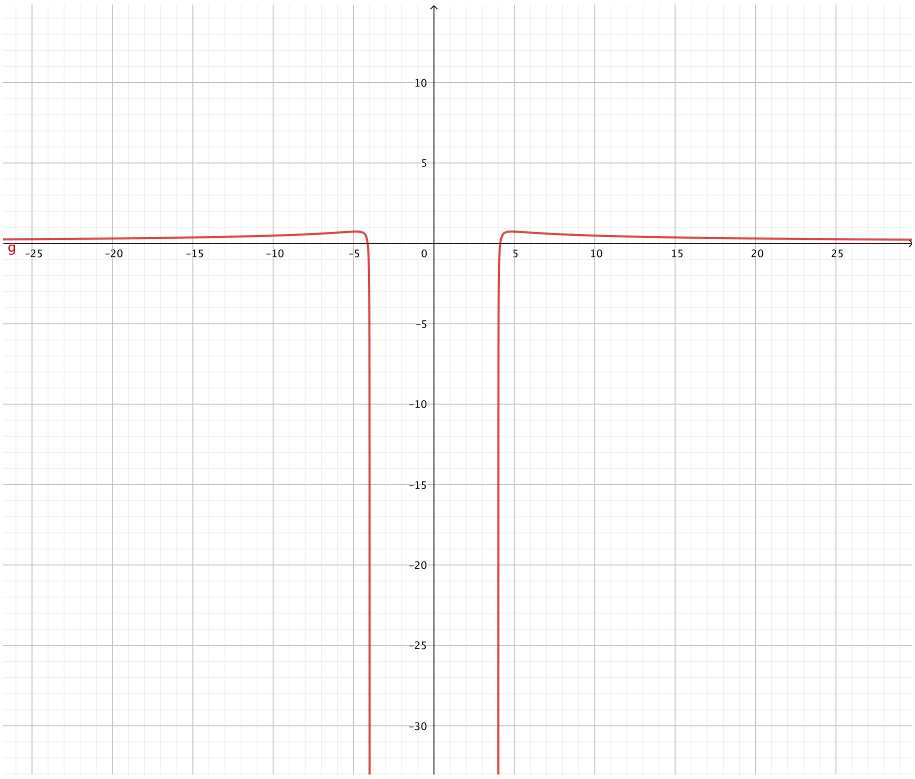
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} e^{\log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{-\operatorname{sen} x \log(x)} =\\
&= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\frac{1/x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}}{}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}} =
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = e^0 = 1.$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione

$$\frac{\log(x^2-16)}{\sqrt{x^2-16}}$$

Soluzione:


g
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
10
5
−5
−10
−15
−20
−25
−30

Esercizio 4 (6 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx$$

Soluzione: Innanzitutto operiamo la seguente sostituzione: $\sqrt{x-1}=t$, da cui $x=1+t^2$ e $dx=2t$.

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx = \int \frac{1+t^2+t}{t^2-4}2tdt = 2\int t+1+\frac{5t+4}{t^2-4}dt =$$
$$= 2\int t+1dt + \int \frac{7}{t-2}+\frac{3}{t+2}dt = t^2+2t+7\log|t-2|+3\log|t+2|+c =$$
$$= x-1+2\sqrt{x-1}+7\log|\sqrt{x-1}-2|+3\log|\sqrt{x-1}+2|+k.$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Soluzione: Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} a_1+\cdots+a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{n+1}\cancel{-\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-1=+\infty$$

Quindi la serie diverge.