

**APPELLO DI MATEMATICA 1 E 2 PER SCIENZE AMBIENTALI E VCA**  
**20/12/2017**

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Matematica 1

Matematica 2

Matematica 1 e 2

**ISTRUZIONI,**  
leggere attentamente.

- (1) Indicare chiaramente qui sopra quale esame si vuole sostenere. In mancanza di indicazioni il compito **non verrà corretto**.
- (2) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 1 deve risolvere gli esercizi da 1 a 7.
- (3) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 2 deve risolvere gli esercizi da 8 a 13.
- (4) Chi vuole sostenere gli esami di Matematica 1 e 2 deve risolvere gli esercizi con il simbolo  $\star$ .
- (5) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.
- (6) Voto massimo: **30/30**.
- (7) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.
- (8) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (9) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- (10) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (11) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (12) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 14)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- (13) **Buon lavoro!**

**Esercizio 1** (3 punti ★). Una scacchiera è formata da 64 quadratini: 32 bianchi e 32 neri. In quanti modi si possono scegliere 2 quadratini, uno bianco e uno nero, dalla scacchiera? E in quanti modi se non ci sono richieste specifiche sul colore? Motivare le risposte.

*Soluzione:* Il numero di possibili scelte di un quadratino bianco tra 32 è semplicemente 32. Lo stesso vale per le scelte di quadratini neri. Quindi le scelte di due quadratini, uno bianco e uno nero sono  $32 \cdot 32$ . Le scelte di due quadratini (senza ordine) sono  $\binom{64}{2} = (64 \cdot 63)/2$ .

**Esercizio 2** (5 punti ★). Stabilire per quali valori di  $k$  il seguente sistema ha un'unica soluzione. Trovare tali soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{R}$  con il metodo di Cramer.

$$\begin{cases} 2x - ky = 5 \\ -kx + ky = 3 \end{cases}$$

*Soluzione:* La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è uguale a  $2k - k^2$ . Quindi il sistema ammette un'unica soluzione quando  $k \neq 0$  e  $k \neq 2$ . In questo caso le soluzioni sono date da

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & -k \\ 3 & k \end{pmatrix}}{2k - k^2} = \frac{8k}{2k - k^2} = \frac{8}{2 - k} \quad \text{e} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -k & 3 \end{pmatrix}}{2k - k^2} = \frac{6 + 5k}{2k - k^2}$$

**Esercizio 3** (4 punti). Descrivere il dominio della seguente funzione.

$$f(x) = \frac{\log(x - 5)}{e + \log x}$$

*Soluzione:*

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

Si noti che  $e + \log x = 0$  quando  $x = e^{-e}$ .

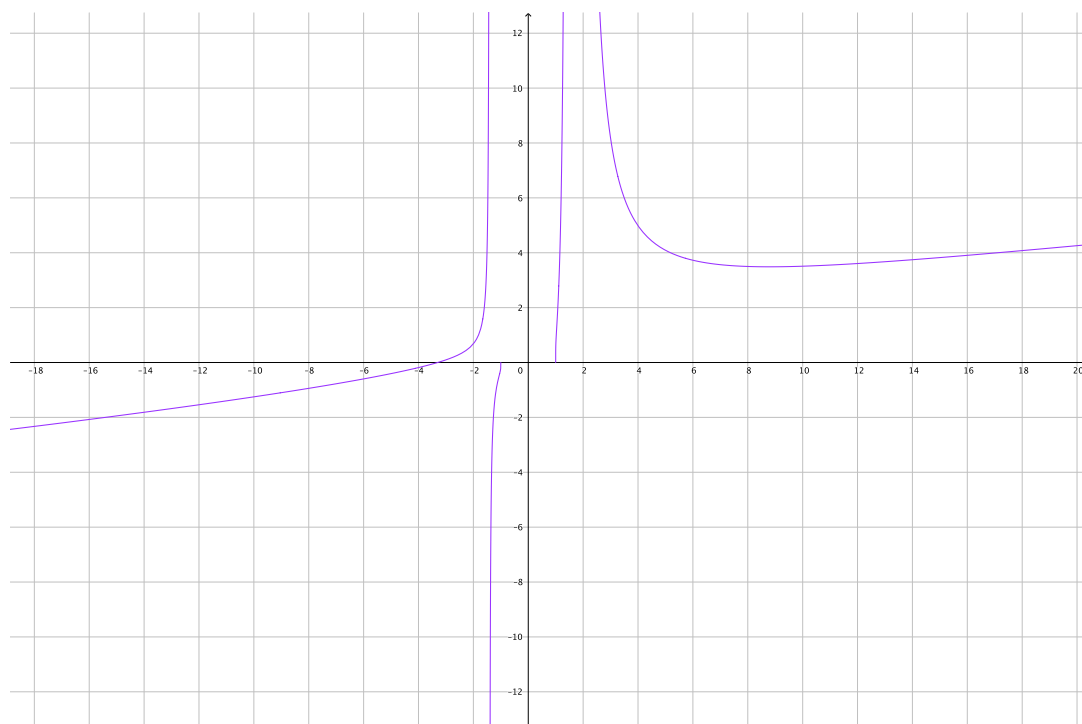
**Esercizio 4** (5 punti). Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = \log \left( \frac{x^2 + 1}{\sin x} \right)$$

*Soluzione:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x}{x^2 + 1} \frac{2x \sin x - (x^2 + 1) \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2x \sin x - (x^2 + 1) \cos x}{(x^2 + 1) \sin x} \end{aligned}$$

**Esercizio 5** (4 punti ★). Sia  $f$  la funzione descritta dal grafico qui sotto:



Indicare i seguenti limiti:

•  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$  \_\_\_\_\_

•  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$  \_\_\_\_\_

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$  \_\_\_\_\_

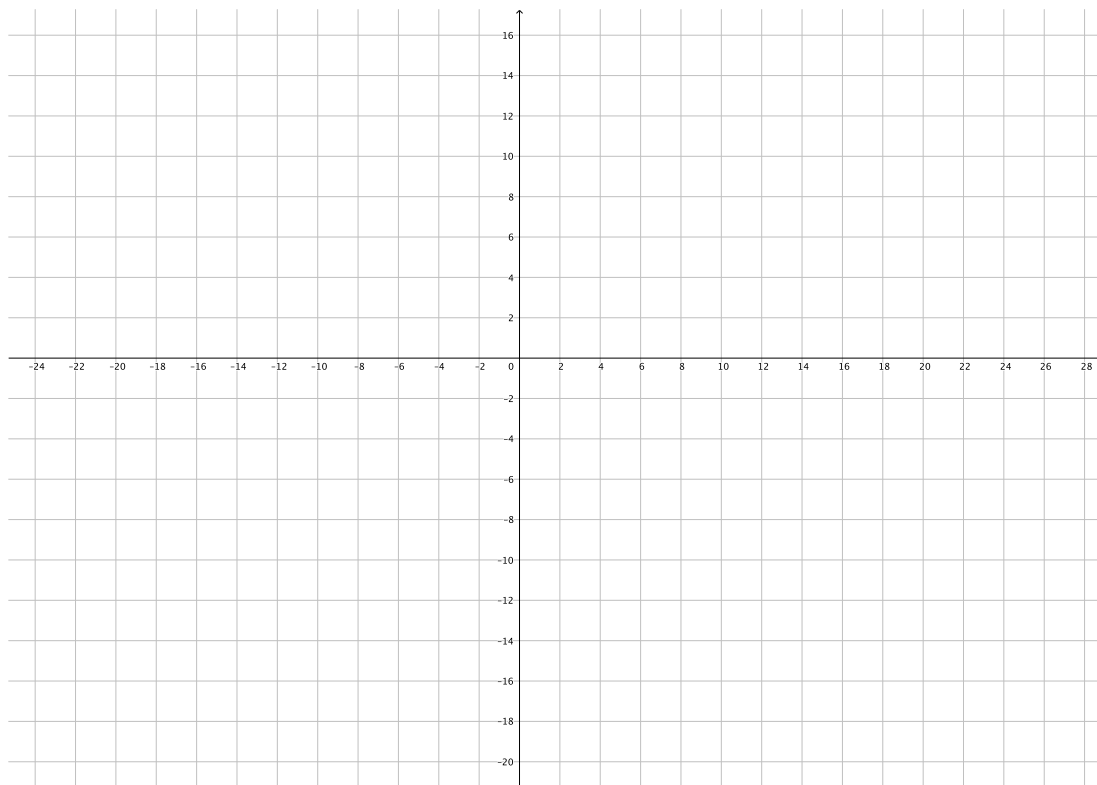
•  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$  \_\_\_\_\_

*Soluzione:*  $+\infty$ . Non esiste.  $-\infty$ . 0.

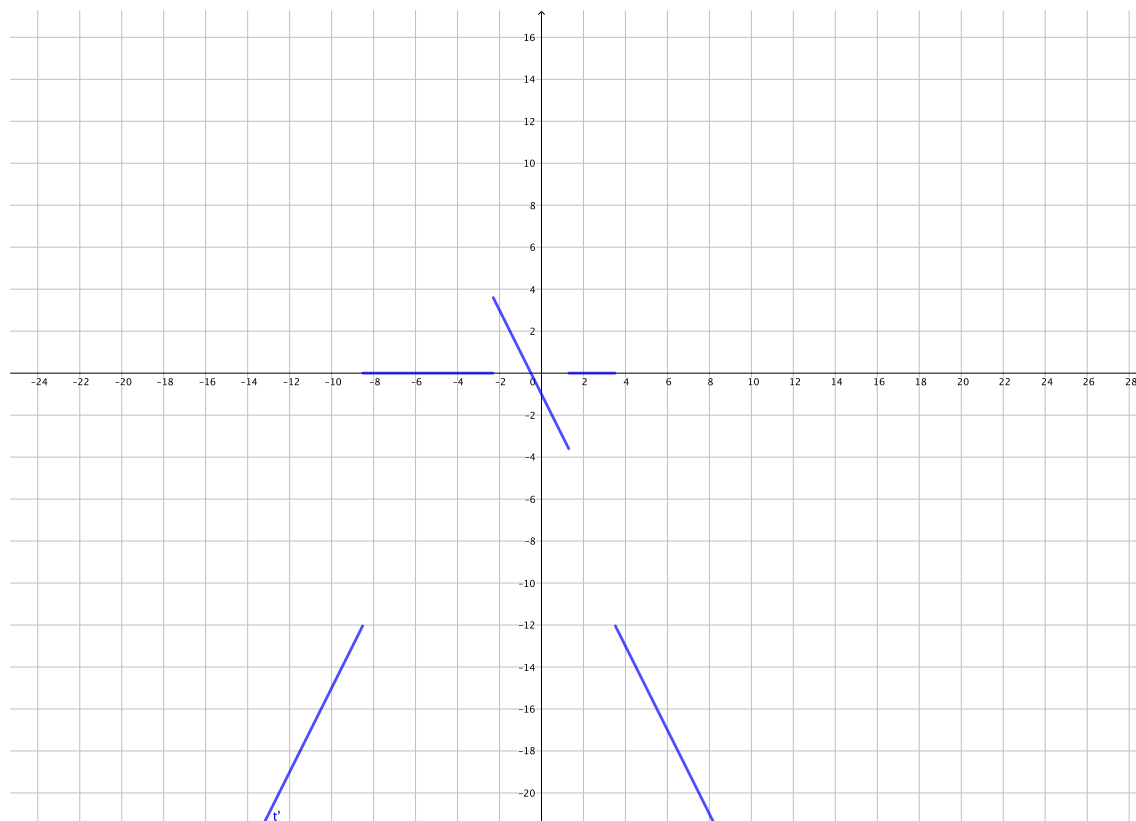
**Esercizio 6** (4 punti ★). Si consideri il seguente grafico di  $f(x)$



Disegnarne la derivata

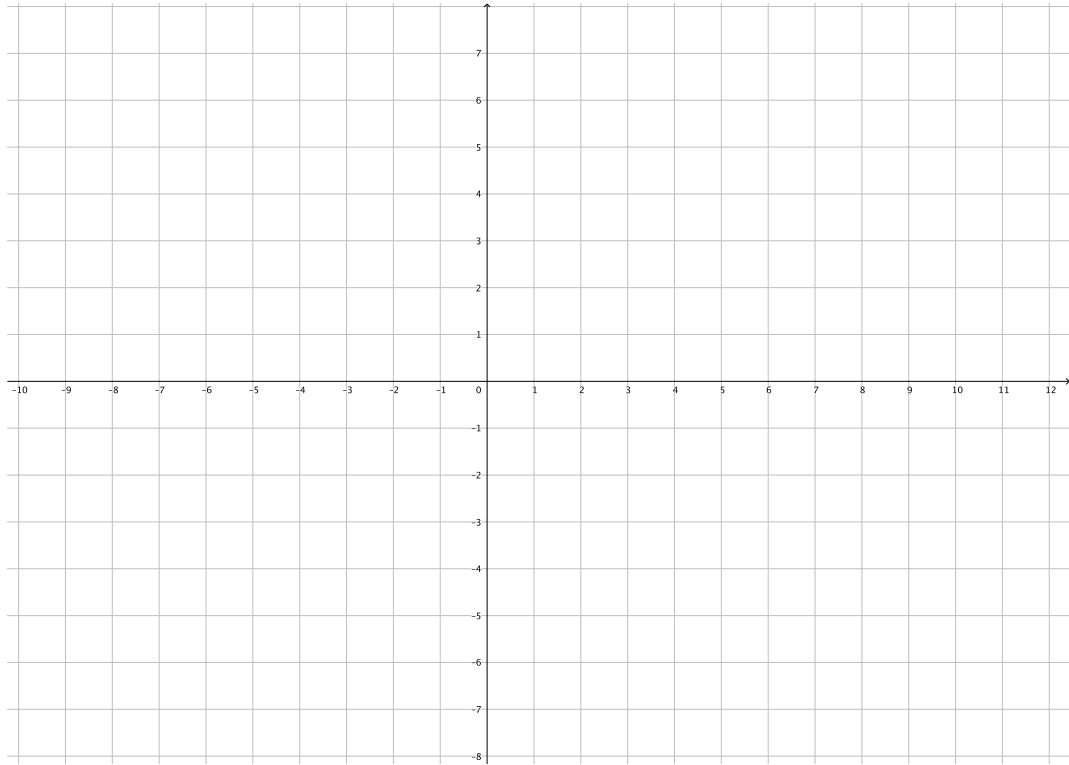


*Soluzione:*

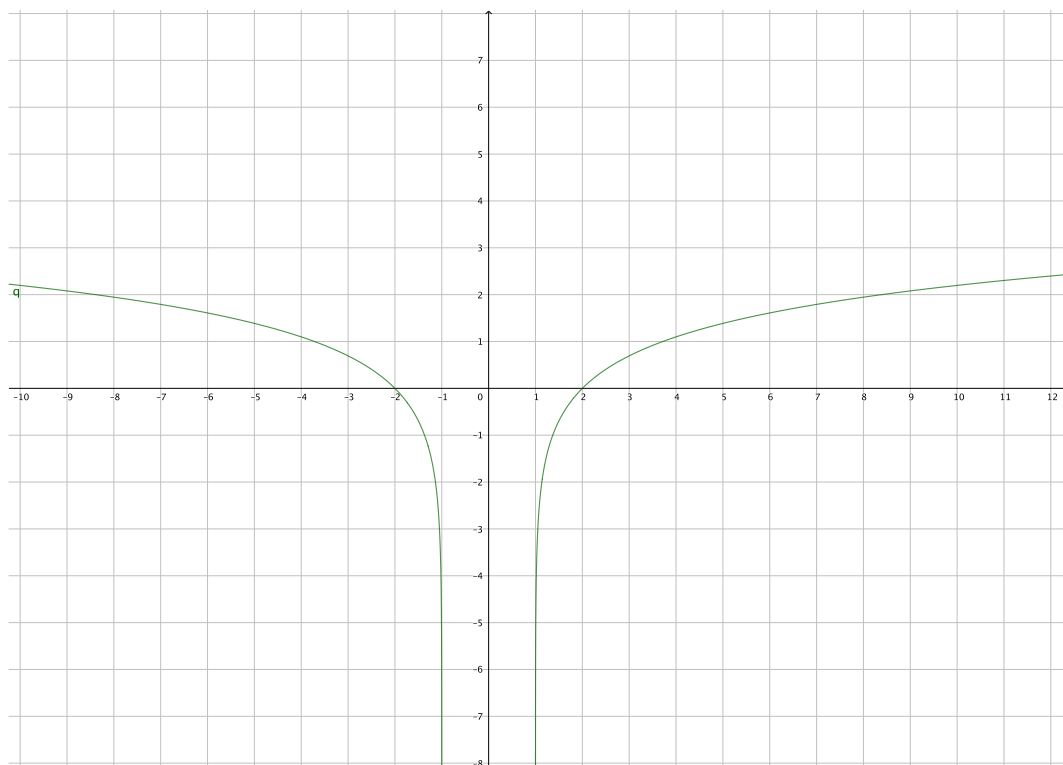


**Esercizio 7** (5 punti). Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \log(|x| - 1)$$



*Soluzione:*



**Esercizio 8** (5 punti ★). Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' - y = e^{2x}$$

*Soluzione:*

**Esercizio 9** (5 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

*Soluzione:*

**Esercizio 10** (5 punti ★). Dare la definizione di somma parziale e di somma di una serie. Indicata con  $S_n$  la somma parziale di indice  $n$ , calcolare  $S_3$  per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

Si determini inoltre il carattere di tale serie.

*Soluzione:*

**Esercizio 11** (5 punti). Determinare l'area compresa tra le curve  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 20$ .

*Soluzione:*

**Esercizio 12** (5 punti ★). Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \cos x \cos 3x dx$$

*Soluzione:*

**Esercizio 13** (5 punti). Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine  $n = 3$  centrato in  $x_0 = -1$  della funzione  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

*Soluzione:*