ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
10/7/2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.

(4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Consideriamo un mazzo da poker di 52 carte.

(1) Quanti insiemi di 5 carte si possono formare?
(2) In quanti insiemi di 5 carte ci può essere un poker di assi servito?
(3) In quanti insiemi di 5 carte ci può essere un poker servito?

Motivare le risposte.

Soluzione:

(1) Poiché si tratta di scegliere 5 carte senza ripetizioni e senza ordine tra 52, sono $\binom{52}{5} = 2.598.960$
(2) Quattro carte sono necessariamente assi, quindi l'unica scelta è quella della quinta carta. Le possibili scelte sono $52 - 4 = 48$, quindi la risposta è 48.
(3) Si hanno 13 scelte per il grado del poker e per ognuna 48 scelte per la quinta carta. Dunque la soluzione è $13 \cdot 48 = 624$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Data le seguente funzione.

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\log(x) - 1} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2-x}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

Dom(f)=____

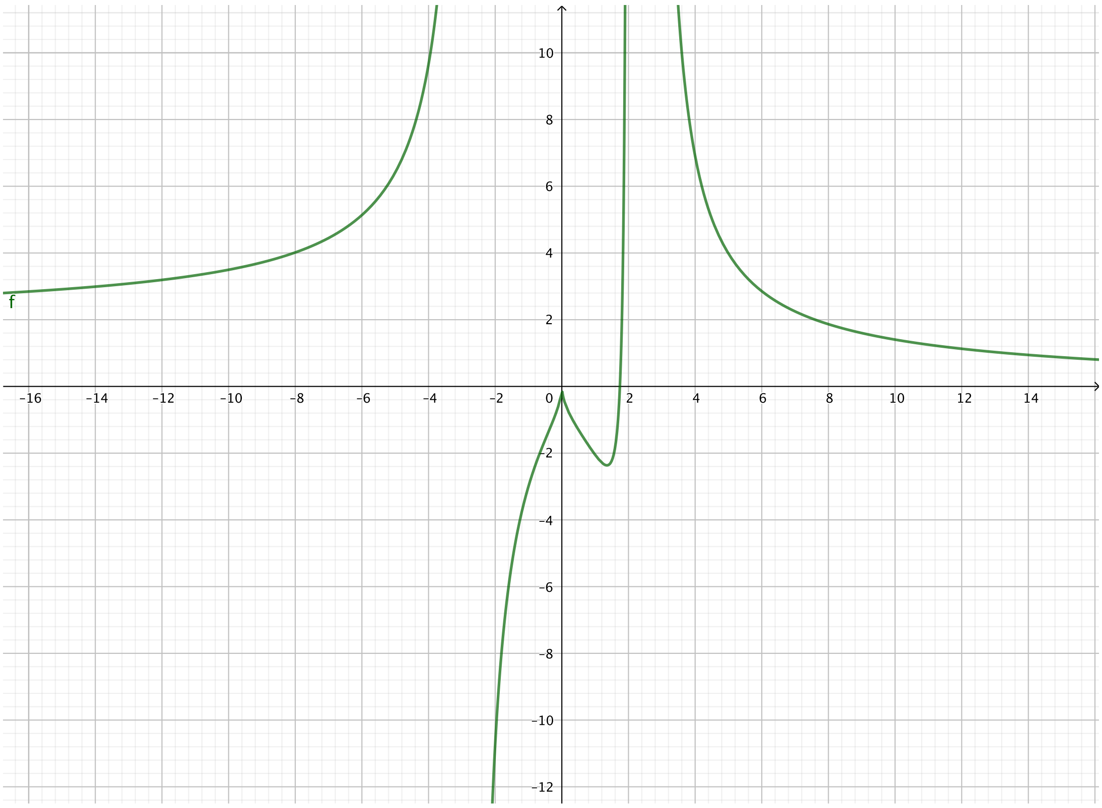
- Calcolare la derivata di $f(x)$.

$f'(x)$=____

Soluzione: $Dom(f) = (0, +\infty) \setminus \{2, e\}$.

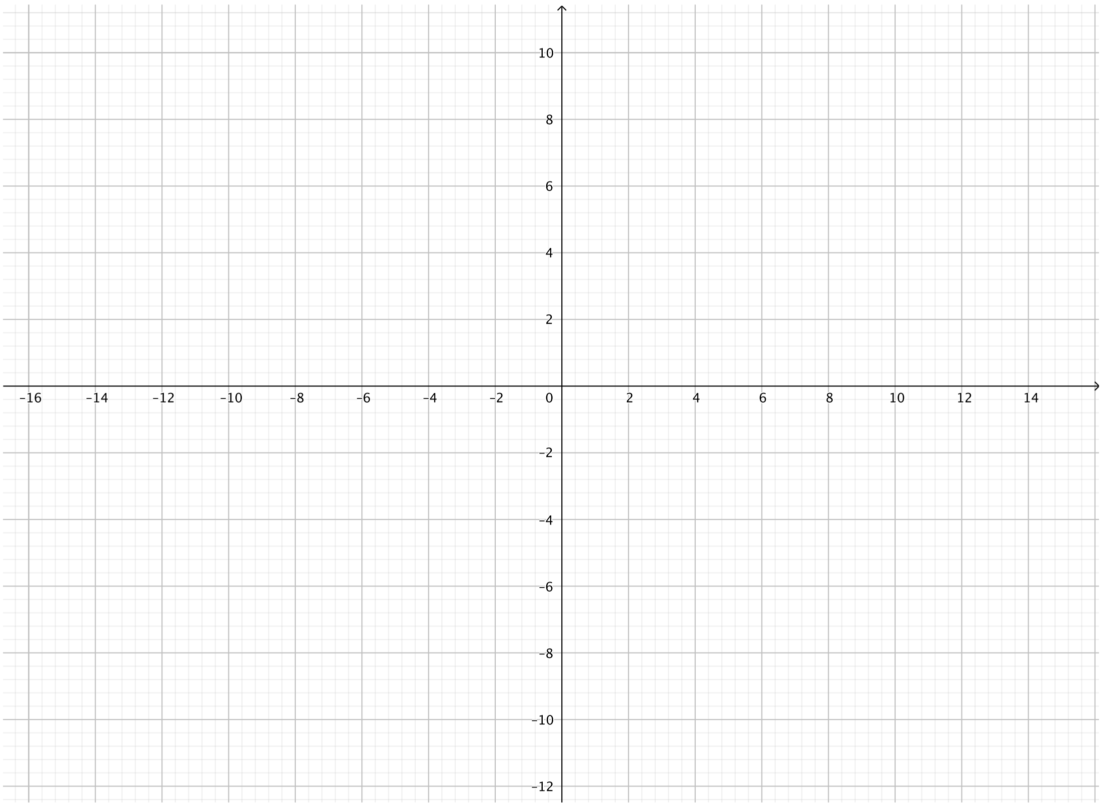
$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{3}}{x(\log(x)-1)^2} + \frac{\frac{2x(2-x)}{2\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1}}{(2-x)^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{x(\log(x)-1)^2} + \frac{\frac{2x-x^2+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{(2-x)^2} =$$
$$= \frac{-2\sqrt{3}}{x(\log(x)-1)^2} + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}(2-x)^2} =$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

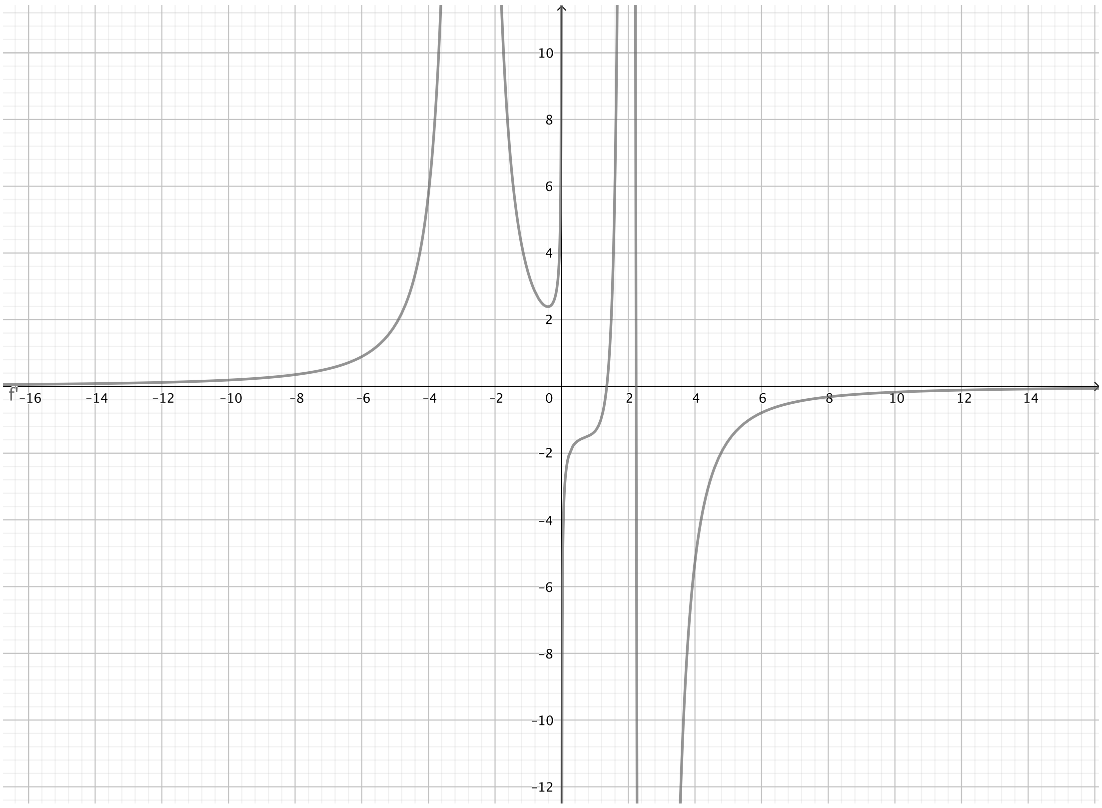


.

Disegnarne la derivata

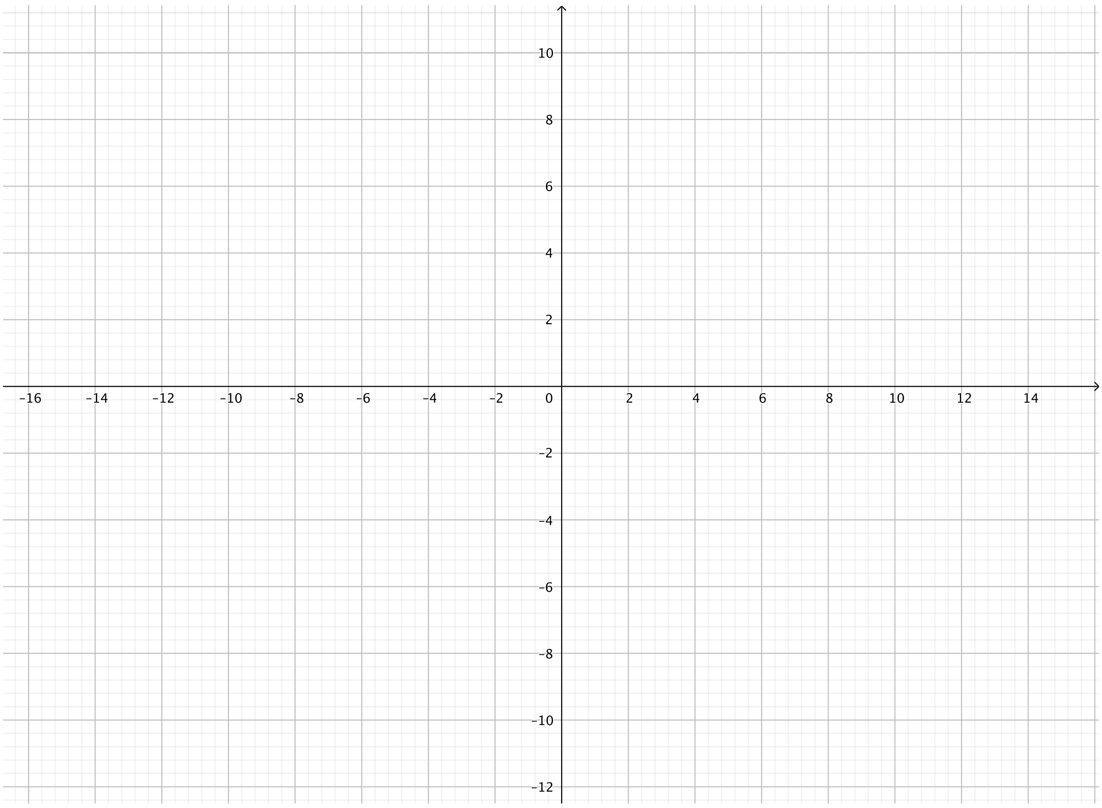


Soluzione:

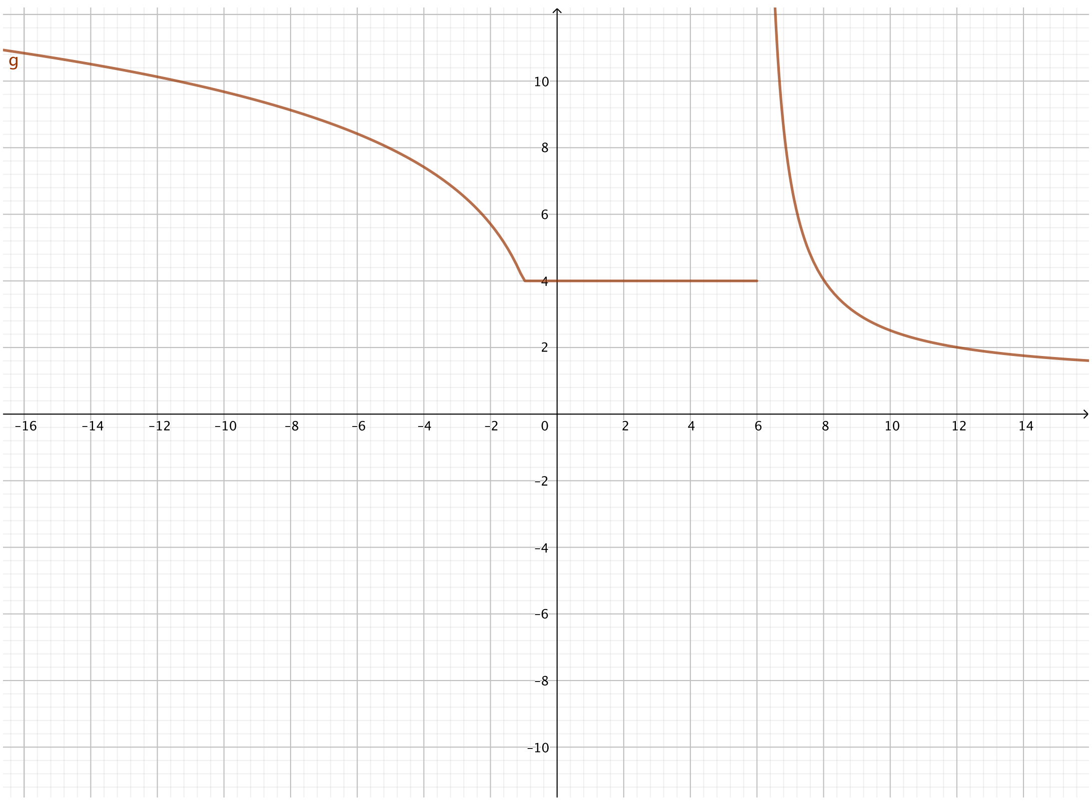


Esercizio 4 (6 punti)**.** Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ con le seguenti proprietà.

(1) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(2) $\lim_{x\to 8} f(x) = 4$,
(3) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = 4$,
(4) $\lim_{x\to 6^+} f(x) = +\infty$,
(5) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$,
(6) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$,
(7) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(8) $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (0, 6)$



Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(-1,-2,-1), (1,0,1) \text{ e } (1,0,3).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di C.

Soluzione:

(1) I vettori sono linearmente indipendenti perché se a, b, c sono tali che

$$a(-1,-2,-1) + b(1,0,1) + c(1,0,3) = (0,0,0)$$

allora si ha $-a+b+c=0$, $-2a=0$ e $-a+b+3c=0$, dunque devono essere $a=0$, $b=-c$ e $b=-3c$, dunque l'unica possibilità è che $a=b=c=0$.

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Poiché il minore d'ordine 2

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante 6, il rango di C è 2.

Esercizio 6 (4 punti)**.** Stabilire per quali valori di k il seguente sistema ammette soluzioni e per quali ammette soluzioni non banali.

$$\begin{cases} -kx + y - 2z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema è omogeneo, quindi ammette sempre almeno la soluzione banale. La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & +3 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è $3k^2+5k+3$. Poiché il sistema ammette soluzioni non banali quando il determinante è nullo e il polinomio ha $\Delta = -11$, non esistono valori di k per cui il sistema ammette soluzioni non banali.