TERZA PROVA INTERMEDIA INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2016/17)

TRACCIA A

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n}$$

Soluzione: La serie è a termini non negativi, quindi possiamo usare il criterio degli infinitesimi con $p = 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{n^2 + \log n} = 1$$

Poiché $p > 1$ e il limite è finito, la serie converge.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Usare lo sviluppo di Taylor per calcolare il seguente limite.
Suggerimento: non occorre superare l'ordine 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

Soluzione: Sviluppando intorno a $x = 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} - o(x^2)}{1 + x^2 + o(x) - 1 - x^3 - o(x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x)} = 1$$

Esercizio 3 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{1 - 2x} dx$$

Soluzione: Operiamo la sostituzione $1 - 2x = t$, da cui otteniamo $dx = -1/2dt$

$$\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \log|t| + c = \log \frac{1}{\sqrt{|1-2x|}} + c$$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x + \sqrt{x}} dx$$

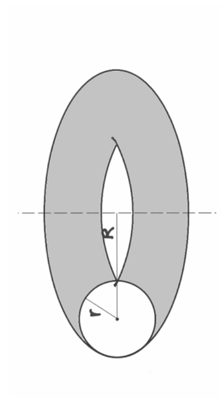
Soluzione: Usiamo la sostituzione $t^2 = x$ da cui si ha $dx = 2tdt$. Otteniamo

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1 + t}{1 + t^2 + t} 2tdt = 2 \int \frac{t(1 + t)}{1 + t^2 + t} dt$$

Dividiamo il polinomio al numeratore per quello al denominatore, ottenendo 1 con resto -1. Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
2\int \frac{t(1+t)}{1+t^2+t}dt = 2\int 1 - \frac{1}{1+t^2+t}dt = 2\int 1 - \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}dt = \\
= 2t - 2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(t+1/2)\right)\right) + c = \\
= 2t - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c = \\
= 2\sqrt{x} - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c
\end{aligned}
$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Trovare il volume del solido ottenuto facendo ruotare, intorno all'asse x, una circonferenza di raggio r il cui centro è posto ad altezza R dall'asse delle x.
Suggerimento: La circonferenza di raggio r è delimitata dalle funzioni $R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e $R - \sqrt{r^2 - x^2}$....



Soluzione: Seguendo il suggerimento basta calcolare il volume come la differenza tra il solido di rotazione ottenuto facendo girare la prima funzione e quello ottenuto facendo roteare la seconda funzione.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \pi(f(x)^2 - g(x)^2)dx = \pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{r^2-x^2})^2 - (R+\sqrt{r^2-x^2})^2 dx \\
&= 4\pi R\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} = 2\pi^2 R r^2.
\end{aligned}
$$