TERZA PROVA INTERMEDIA INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2016/17)

TRACCIA B

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

Soluzione: La serie è a termini postitivi, e per il termine generico si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^4} = +\infty$$

Quindi a serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Usare lo sviluppo di Taylor per calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + 2x^3}{x^2}$$

Soluzione: Sviluppando intorno a $x = 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/6 + o(x^4) - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4) + \frac{11x^3}{6}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(o(x^4) + \frac{11x}{6} \right) = 0$$

Esercizio 3 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int \cos(3x + 4)dx$$

Soluzione:

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3} \int 3\cos(3x+4)dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+4) + c$$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int e^x \ln(1 - e^{-x})dx$$

Soluzione: Operiamo la sostituzione $t = e^{-x}$, da cui abbiamo $dx = -dt/t$.

$$\int e^x \ln(1 - e^{-x})dx = \int -\frac{\ln(1-t)}{t^2} dt$$

A questo punto procediamo per parti con $f(t) = \ln(1-t), g'(t) = -t^{-2}, f'(t) = -\frac{1}{1-t}$ e $g(t) = \frac{1}{t}$

$$\int -\frac{\ln|(1-t)|}{t^2} dt = \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \int \frac{1}{t(t-1)} dt$$

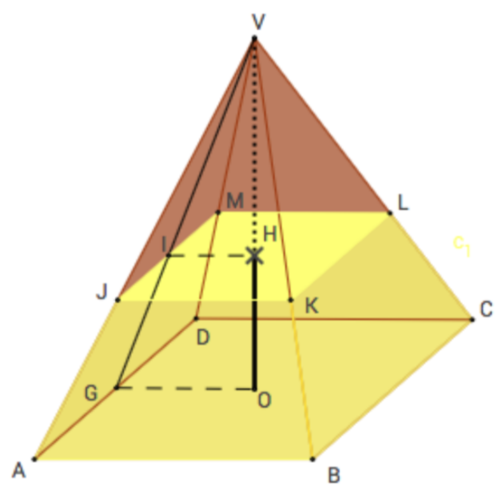
Scomponiamo la frazione

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{t} = \frac{At + Bt - B}{t(t-1)}$$

Quindi deve essere $A + B = 0$ e $B = -1$, da cui $A = 1$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\frac{\ln|(1-t)|}{t} + \int \frac{1}{t(t-1)}dt &= \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \int \frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{t}dt = \\
&= \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \int \frac{1}{(t-1)}dt - \int \frac{1}{t}dt = \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \ln|(t-1)| - \ln(t) = \\
&= \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \ln\frac{|t-1|}{t} = \frac{\ln|(1-t)|}{t} + \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) \\
&= e^x \ln|(1-e^{-x})| + \ln|(1-e^x)| = \\
&= e^x \ln|(1-e^{-x})| + \ln|(e^{-x}-1)| + x
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Usare gli integrali definiti per trovare il volume della piramide a base quadrata di lato b e altezza h.
Suggerimento: Si noti che il triangolo GOV è simile al triangolo LHV, quindi i lati sono proporzionali: $IH : GO = VH : VO$. Ponendo $OH = x$....



Soluzione: Abbiamo che $AB = b$, quindi $GO = b/2$; inoltre $OV = h$. Chiamiamo $OH = x$, allora abbiamo

$$\begin{aligned}
IH : GO &= VH : VO \\
IH : b/2 &= (h-x) : h \\
IH &= \frac{b(h-x)}{2h} =
\end{aligned}$$

Quindi al variare di x, l'area del quadrato è data da $JK^2 = (2LH)^2 = \frac{b^2(h-x)^2}{h^2}$. Integrando tra 0 e h, si ottiene:

$$\int_0^h \frac{b^2(h-x)^2}{h^2} dx = \frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h-x)^2 dx = \frac{b^2}{h^2} \left(h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3} \right) = \frac{b^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{b^2 h}{3}.$$