APPELLO DI MATEMATICA A SCIENZE AMBIENTALI PER STUDENTI FUORI CORSO

4/4/2017

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Matematica 1 ☐ Matematica 2 ☐ Matematica 1 e 2 ☐

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Indicare chiaramente qui sopra quale esame si vuole sostenere. In mancanza di indicazioni il compito **non verrà corretto**.

(2) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 1 deve risolvere gli esercizi da 1 a 8.

(3) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 2 deve risolvere gli esercizi da 9 a 14.

(4) Chi vuole sostenere gli esami di Matematica 1 e 2 deve risolvere gli esercizi con il simbolo $\star$.

(5) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(6) Voto massimo: **30/30**.

(7) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(8) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(9) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(10) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(11) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 16)**. I 6 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(12) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** Uno studente iscritto a una laurea triennale ha 5 esami il primo anno, 7 esami il secondo anno e 6 esami il terzo anno. Supponendo che non si possa rimandare un esame da un anno all'altro ma che gli esami possano essere sostenuti nell'ordine preferito, quante sono le possibili sequenze dei 18 esami?

Soluzione: Al primo anno le possibili disposizioni sono 5!, al secondo 7!, al terzo 6!. Quindi in totale ci sono 5!6!7! possibili sequenze.

Esercizio 2 (5 punti $\star$)**.** Trovare gli autovalori e autovettori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Polinomio caratteristico: $x^2 - 9$. Autovalori: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$. Autovettori $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (2, 1)$.

Esercizio 3 (4 punti $\star$)**.** Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\log(-2x^2 - 3x - 1)}{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}$$

dom(f)= ____________________

Soluzione:

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -1/2 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Esercizio 4 (4 punti)**.** Sia f definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{e^{x^2 - x}}.$$

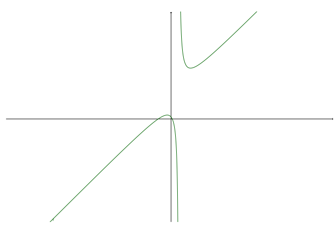
Calcolare la derivata di f.

Soluzione:

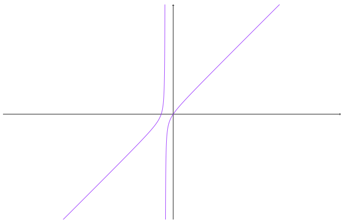
$$f'(x) = \frac{\frac{2x(e^{x^2-x})}{2\sqrt{x^2-1}} - e^{x^2-x}(2x-1)\sqrt{x^2-1}}{e^{2(x^2-x)}} = \frac{x(e^{x^2-x}) - e^{x^2-x}(2x-1)(x^2-1)}{e^{2(x^2-x)}\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(e^{x^2-x})(x - (2x-1)(x^2-1))}{e^{2(x^2-x)}\sqrt{x^2-1}} = \frac{x - (2x-1)(x^2-1)}{e^{x^2-x}\sqrt{x^2-1}}$$

Esercizio 5 (4 punti)**.** Sia f la funzione descritta dal grafico qui sotto:

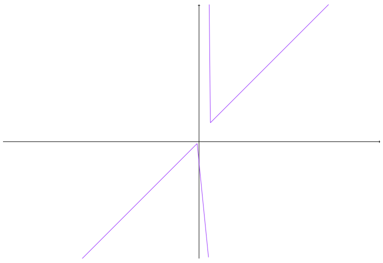


Dire quale dei seguenti grafici rappresenta la derivata di f:



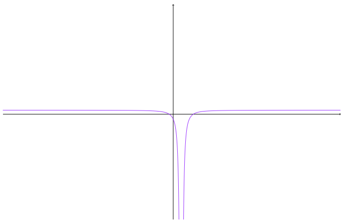
☐ Sì, è questo.

☐ No, non è questo perché



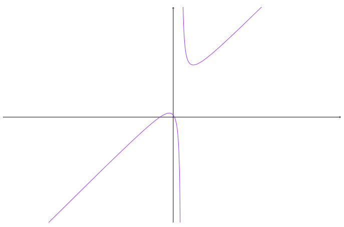
☐ Sì, è questo.

☐ No, non è questo perché



☐ Sì, è questo.

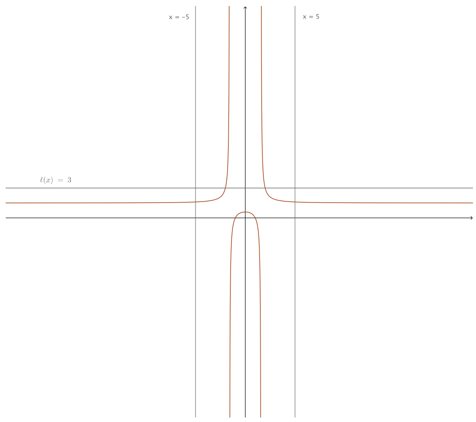
☐ No, non è questo perché



☐ Sì, è questo.

☐ No, non è questo perché

Esercizio 6 (4 punti $\star$)**.** Si consideri il seguente grafico



.

Dire quale delle seguenti seguenti funzioni può avere un grafico come quello sopra:

$f_1(x) = 3\frac{x+3}{5-x}$

☐ Sì, è questa.

☐ No, non è questa perché

$f_1(x) = 3\frac{x^2-1}{2x^2-5}$

☐ Sì, è questa.

☐ No, non è questa perché

$f_1(x) = 3\frac{x+3}{2x+5}$

☐ Sì, è questa.

☐ No, non è questa perché

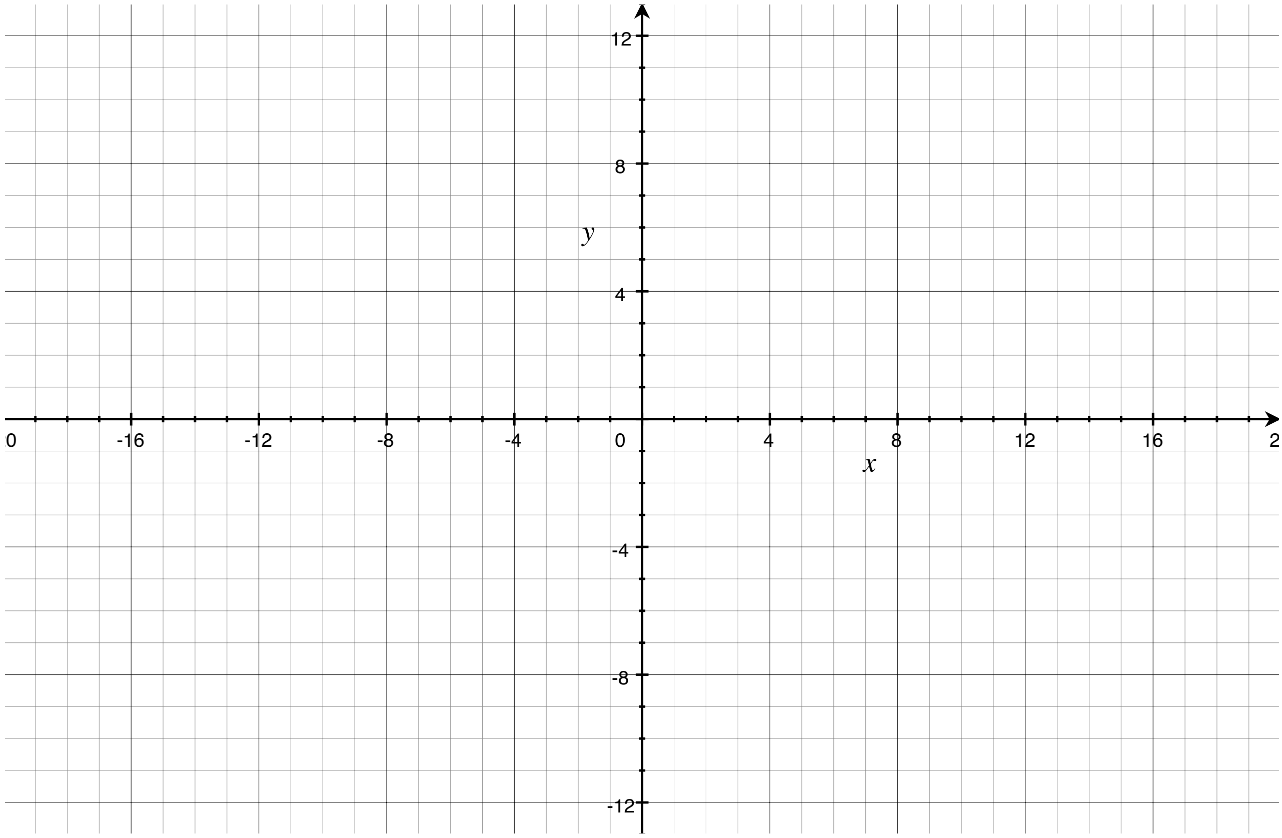
$f_1(x) = 3\frac{x^2-1}{x^2-5}$

☐ Sì, è questa.

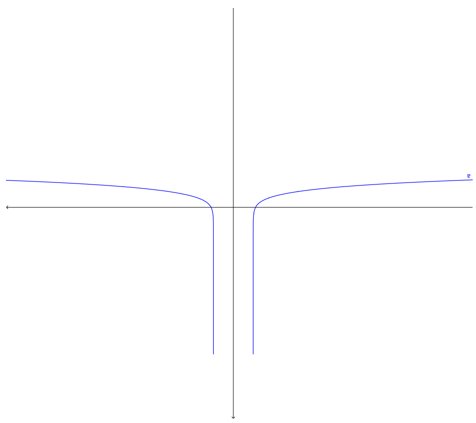
☐ No, non è questa perché

Esercizio 7 (5 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 4)$$



Soluzione:



Esercizio 8 (3 punti $\star$)**.** Trovare il rettangolo di area massima avente perimetro uguale a 100.

Soluzione: $b = h = 25$.

Esercizio 9 (5 punti $\star$)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \log_e x \, dx.$$

Soluzione:

$$\int x^2 \log_e x \, dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + c \tag{1}$$

Esercizio 10 (6 punti)**.** Determinare il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle x la regione di piano nel primo quadrante delimitata dalle curve $f(x) = 4x$ e $g(x) = x^3$.

Soluzione: Le funzioni si intersecano nel primo quadrante in $x = 0$ e $x = 2$, quindi l'area del solido è data da:

$$A = \pi \int_0^2 f^2(x) - g^2(x) \, dx = \pi \left[16/3x^3 - x^7/7\right]_0^2 = \frac{512}{21}\pi.$$

Esercizio 11 (5 punti)**.** Dire se la seguente serie converge motivando la risposta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$$

Soluzione: Detta $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$, abbiamo che a_n è ovviamente infinitesima. Poiché il logaritmo è una funzione crescente quando la base è maggiore di 1, si ha che a_n è decrescente. Quindi per il criterio di Leibniz la serie converge.

Esercizio 12 (6 punti $\star$)**.** Determinare centro, raggio e intervallo di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (x-4)^n$$

Soluzione: Il centro è per definizione 4. Posto $a_n = n^2$ abbiamo che $\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, quindi $R = 1$. Nei casi particolari $x = 3$ o $x = 5$ si vede immediatamente che la serie non converge. Dunque la serie converge puntualmente nell'intervallo $(3, 5)$ e uniformemente in ogni suo sottointevallo chiuso e limitato.

Esercizio 13 (5 punti $\star$)**.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 3y'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Le soluzioni generali sono date dalle funzioni della forma $c_1 + c_2 e^{\lambda x}$. Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 + c_2 = 0$ e $3c_2 = 1$. Da cui

$$y = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}.$$

Esercizio 14 (5 punti)**.** Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Soluzione: L'equazione ausiliaria è $r^2 + 2r + 1 = 0$ che ha $\Delta = 0$ e radice $r = -1$, quindi la soluzione generale è $y = Ae^{-t} + Bte^{-t}$ per A e B costanti arbitrarie.