I APPELLO ESTIVO DI MATEMATICA PER SCIENZE AMBIENTALI
13/6/2017

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Matematica 1 ☐ Matematica 2 ☐ Matematica 1 e 2 ☐

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Indicare chiaramente qui sopra quale esame si vuole sostenere. In mancanza di indicazioni il compito **non verrà corretto**.

(2) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 1 deve risolvere gli esercizi da 1 a 8.

(3) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 2 deve risolvere gli esercizi da 9 a 14.

(4) Chi vuole sostenere gli esami di Matematica 1 e 2 deve risolvere gli esercizi con il simbolo $\star$.

(5) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(6) Voto massimo: **30/30**.

(7) È possibile ritirarsi dall'esame dopo un'ora dall'inizio.

(8) Chi consegna il compito e consegue un voto minore o uguale a 10, **non potrà ripetere lo scritto nella stessa sessione**.

(9) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(10) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(11) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(12) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(13) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 16)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(14) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** Bisogna formare un comitato composto da 3 uomini e 3 donne, scegliendo i membri in un gruppo di 8 donne e 6 uomini. Quanti comitati diversi sono possibili? Motivare la risposta.

Soluzione: Il numero di tutte le possibili scelte di 3 uomini tra 6 è dato da $\binom{6}{3}$ e quello di 3 donne tra 8 è dato da $\binom{8}{3}$. Quindi il numero di tutti i possibili comitati è dato da $\binom{6}{3} \cdot \binom{8}{3}$.

Esercizio 2 (5 punti $\star$)**.** Trovare gli autovalori e autovettori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Polinomio caratteristico: $\lambda^2 - 7$. Autovalori: $\lambda_1 = -\sqrt{7}$, $\lambda_2 = \sqrt{7}$. Autovettori $v_1 = (\frac{\sqrt{7}-1}{2}, 1)$, $v_2 = (\frac{-\sqrt{7}-1}{2}, 1)$.

Esercizio 3 (4 punti $\star$)**.** Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x^2+2x)}}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$$

dom(f)= ______________________________

Soluzione:

$$dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x \leq -1-\sqrt{2} \text{ oppure } x \geq -1+\sqrt{2}) \text{ e } x \neq \pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}+1} \text{ con } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Poiché la funzione può essere scritta anche nella forma

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x^2+2x)}\cos(x^2-1)}{\operatorname{sen}(x^2-1)}$$

è corretta anche la seguente soluzione:

$$dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x \leq -1-\sqrt{2} \text{ oppure } x \geq -1+\sqrt{2} \text{ e } x \neq \pm\sqrt{k\pi+1} \text{ con } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 4 (4 punti)**.** Sia f definita da

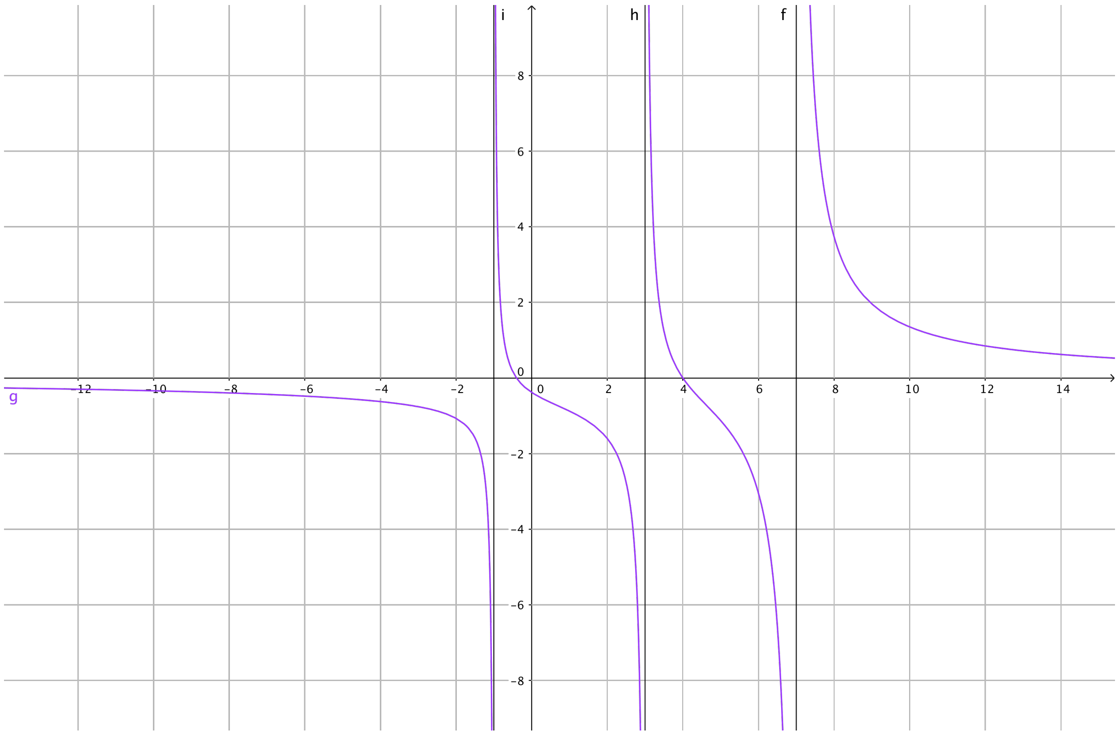
$$f(x) = \frac{xe^x}{\ln(x^2-1)}.$$

Calcolare la derivata di f.

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)\ln(x^2-1) - \frac{2x^2e^x}{x^2-1}}{\ln^2(x^2-1)} = \frac{e^x(1+x)(x^2-1)\ln(x^2-1) - 2x^2e^x}{(x^2-1)\ln^2(x^2-1)}$$

Esercizio 5 (4 punti $\star$)**.** Sia f la funzione descritta dal grafico qui sotto:

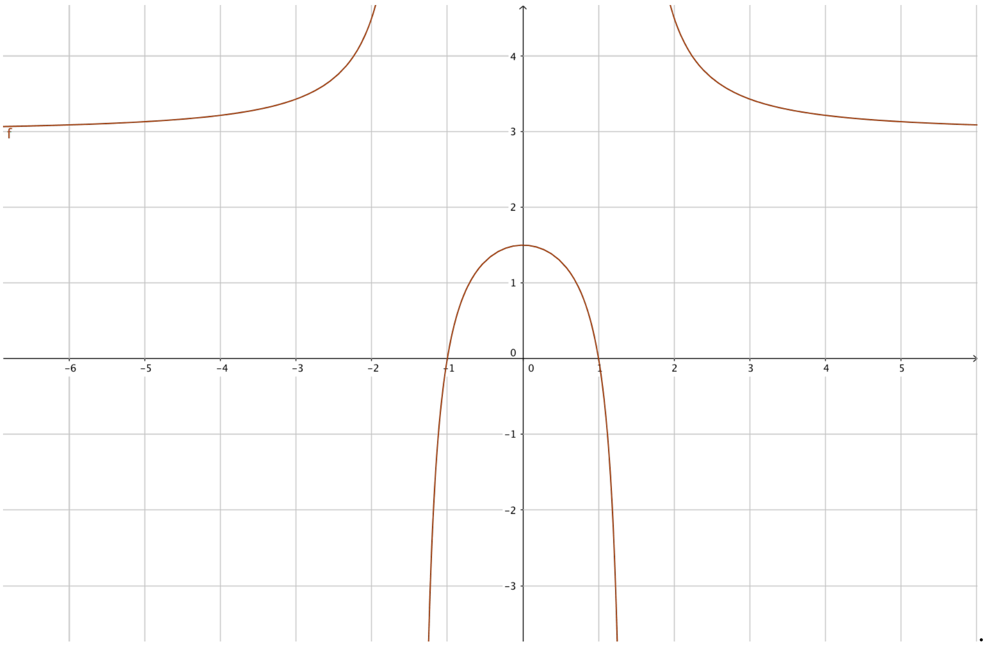


Indicare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ____________________________
- $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$ ____________________________
- $\lim_{x \to 4} f(x) =$ ____________________________
- $\lim_{x \to 7} f(x) =$ ____________________________

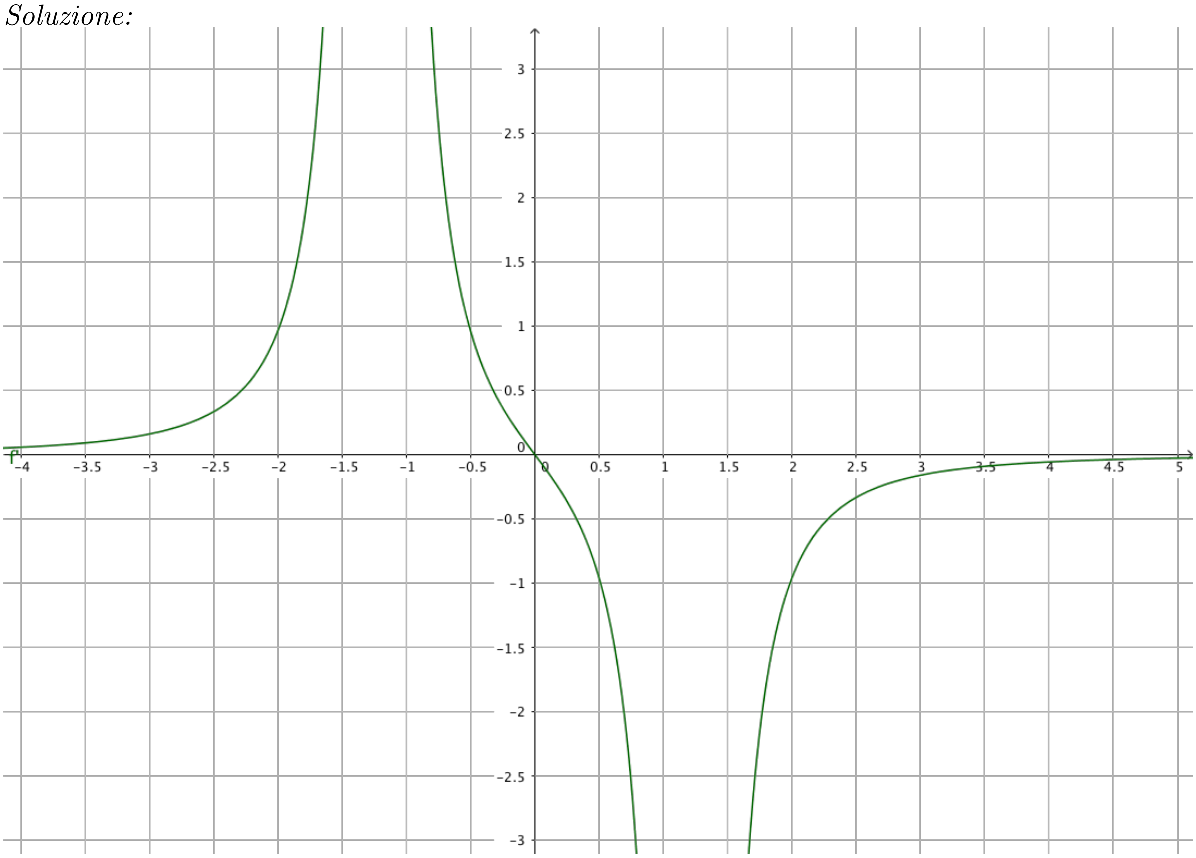
Soluzione: 0. $-\infty$. 0. Non esiste.

Esercizio 6 (4 punti $\star$)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$



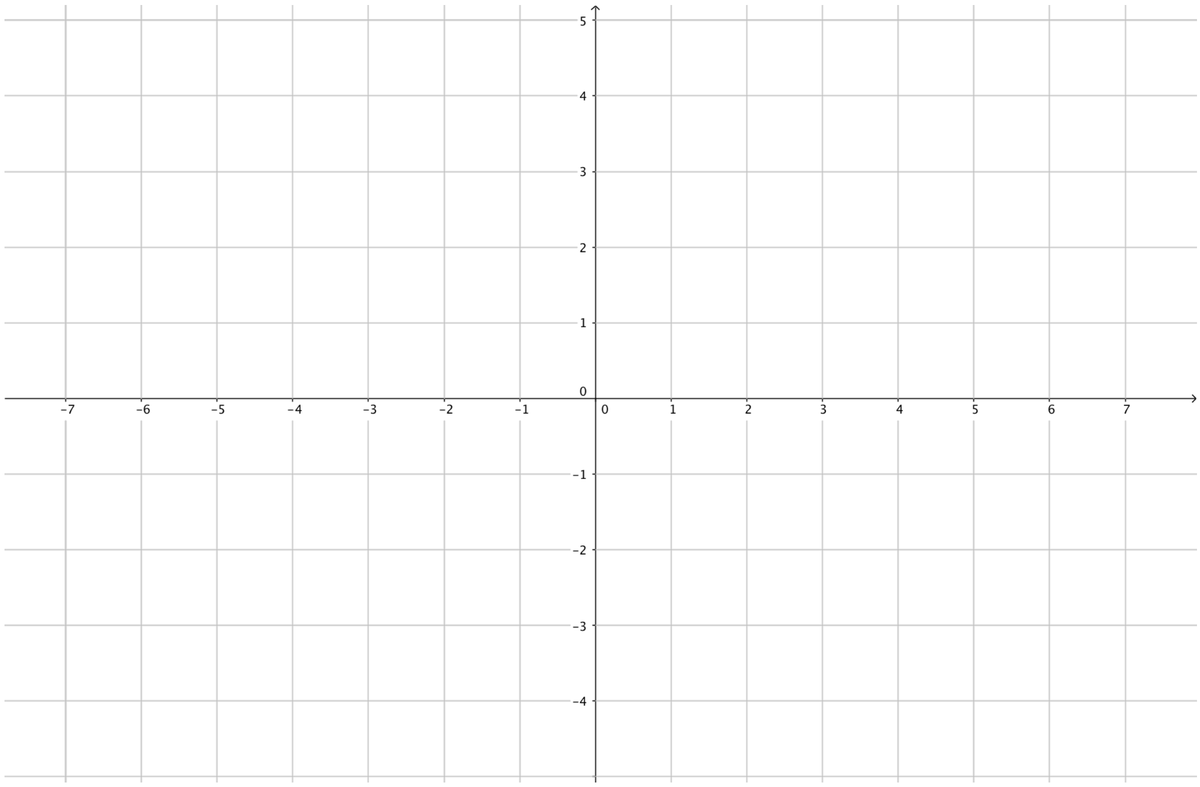
Disegnarne la derivata

Soluzione:

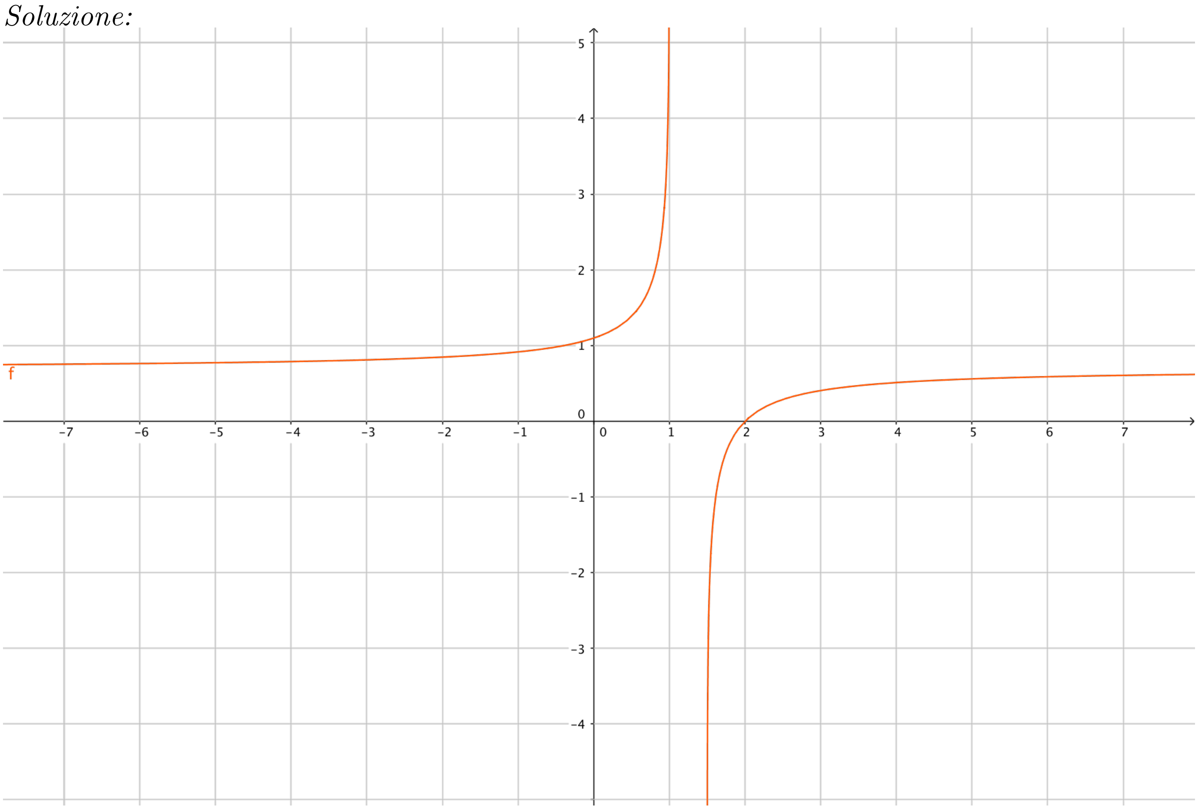


Esercizio 7 (5 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)$$



Soluzione:



Esercizio 8 (3 punti)**.** Qual è il tasso di variazione della circonferenza di un cerchio rispetto alla sua area?

Soluzione: Sappiamo che l'area del cerchio è data da $A(r) = \pi r^2$ e che la circonferenza è data da $C(r) = 2r\pi$, quindi il raggio in funzione dell'area è dato da $r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Per calcolare la variazione $\frac{dC}{dA} = \frac{dC(r(A))}{dA}$ usiamo al formula per la derivata di funzione composta. Abbiamo quindi $\frac{dC(r(A))}{dA} =$

$\frac{dC(r)}{dr} \cdot \frac{dr(A)}{dA}$. Ricaviamo quindi $\frac{dC(r(A))}{dA} = 2\pi r \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi A}} = \frac{\pi r}{\sqrt{\pi A}}$

Esercizio 9 (5 punti $\star$)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx.$$

Soluzione: Per parti:

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int (1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right) + c = \tag{1}$$

$$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}} + c \tag{2}$$

Esercizio 10 (6 punti)**.** Determinare il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle x la regione di piano nel primo quadrante delimitata dalle curve $f(x) = x$ e $g(x) = -x^2 + x$.

Soluzione: Le funzioni si intersecano nel primo quadrante in $x = 0$ e $x = 3$, e in quell'intervallo g maggiora f, quindi l'area del solido è data da:

$$A = \pi \int_0^3 g^2(x) - f^2(x)\,dx = \pi \int_0^3 x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2\,dx = \pi \left[\frac{x^5}{4} - \frac{x^4}{2}\right]_0^3 = 20,25.$$

Esercizio 11 (5 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$$

Soluzione: La serie è a termini positivi, quindi possiamo usare il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!2^{(n+1)} \cdot n^n}{n!2^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^{(n+1)}}{2^n} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 2/e < 1\end{aligned}$$

Da ciò segue che la serie converge.

Esercizio 12 (6 punti $\star$)**.** Determinare centro, raggio e intervallo di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

Soluzione: Il centro è per definizione 0. Posto $a_n = \frac{1}{n+2}$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, quindi $R = 1$. Nel caso particolare $x = -1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ diverge, mentre nel caso $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge per il criterio delle serie a segni alternati.

Esercizio 13 (5 punti $\star$)**.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Le soluzioni generali sono date dalle funzioni della forma $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, dove $\lambda_{1,2}$ sono le soluzioni del polinomio associato $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Quindi otteniamo $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 + 2c_2 = 1$. Da cui

$$y = -e^x + e^{2x}.$$

Esercizio 14 (5 punti)**.** Risolvere l'equazione differenziale

$$y' - x^2 y = 0$$

Soluzione: Procediamo separando le variabili:

$$y' - x^2 y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2 y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = x^2 dx$$

quindi

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = \frac{x^3}{3} + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = k\sqrt[3]{e^{x^3}}$$