II APPELLO ESTIVO DI MATEMATICA PER SCIENZE AMBIENTALI
4/7/2017

Nome: ____

Cognome: ____

Matricola: ____

Matematica 1 ☐ Matematica 2 ☐ Matematica 1 e 2 ☐

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Indicare chiaramente qui sopra quale esame si vuole sostenere. In mancanza di indicazioni il compito **non verrà corretto**.

(2) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 1 deve risolvere gli esercizi da 1 a 8.

(3) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 2 deve risolvere gli esercizi da 9 a 14.

(4) Chi vuole sostenere gli esami di Matematica 1 e 2 deve risolvere gli esercizi con il simbolo $\star$.

(5) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(6) Voto massimo: **30/30**.

(7) È possibile ritirarsi dall'esame dopo un'ora dall'inizio.

(8) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(9) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(10) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(11) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(12) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 16)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(13) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots 20\}$, dire qual è il numero di sottoinsiemi di A che contengono tutti i numeri dispari in A. Motivare la risposta.

Soluzione: Sia B l'insieme dei numeri dispari in A, l'insieme B contiene 10 elementi, quindi anche $A \setminus B$ contiene 10 elementi. Per calcolare il numero di insiemi contenenti tutti i numeri dispari in A, basta considerare i sottoinsiemi di A che estendono B. In altre parole, basta contare i sottoinsiemi distinti di $A \setminus B$. Quindi il numero cercato è 2^{10}.

Esercizio 2 (5 punti $\star$)**.** Calcolare il seguente prodotto righe per colonne e calcolare il rango della matrice risultante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 2.

Esercizio 3 (4 punti $\star$)**.** Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}\right)$$

dom(f)= ____

Soluzione:

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -2 \text{ oppure } -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1\}.$$

Esercizio 4 (4 punti)**.** Sia f definita da

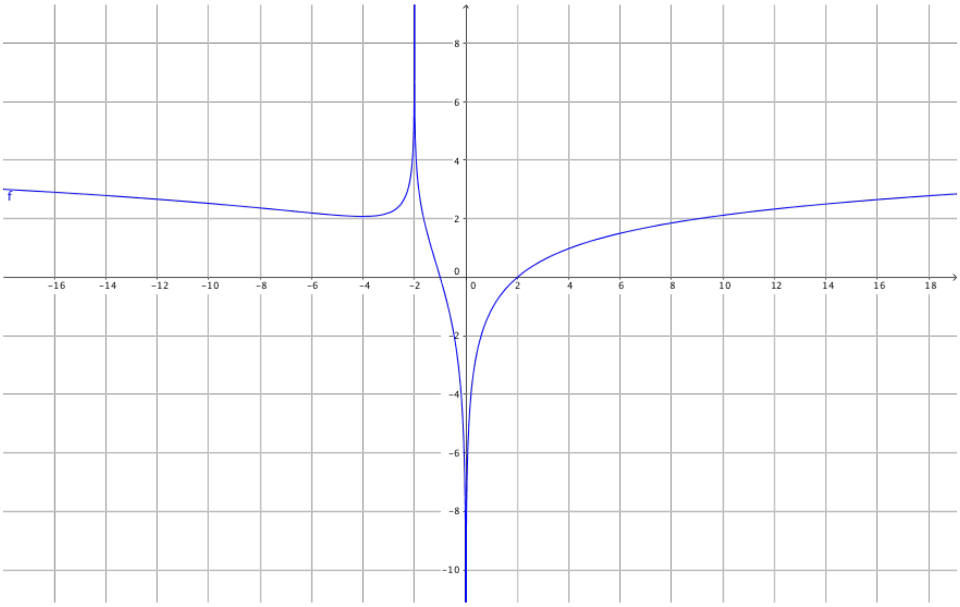
$$f(x) = \frac{e^{(x^2+3)}}{\operatorname{sen}(x)\ln(x^2 - 1)}.$$

Calcolare la derivata di f.

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{2xe^{(x^2+3)}\operatorname{sen}(x)\ln(x^2-1) - e^{(x^2+3)}\left(\cos(x)\ln(x^2-1) + \frac{2x\operatorname{sen}(x)}{x^2-1}\right)}{[\operatorname{sen}(x)\ln(x^2-1)]^2}$$

Esercizio 5 (4 punti $\star$)**.** Sia f la funzione descritta dal grafico qui sotto:

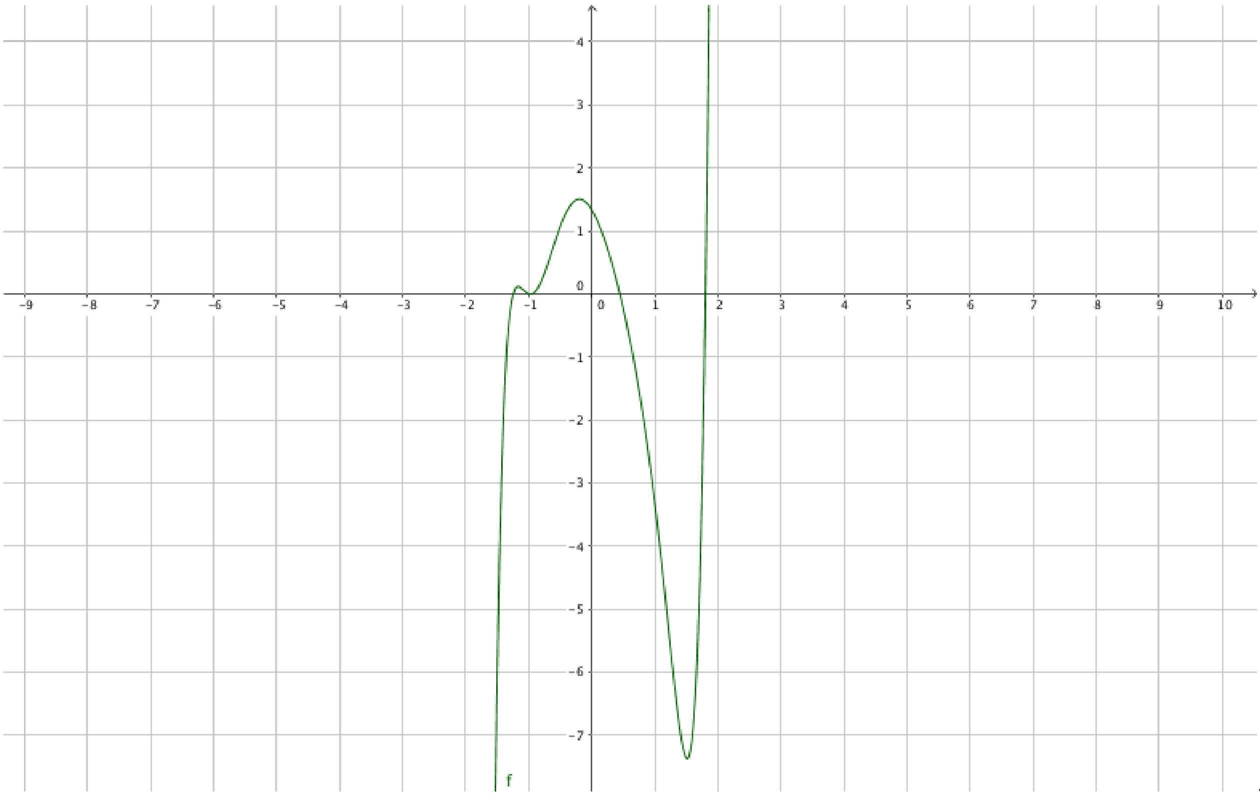


Indicare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$______________________________
- $\lim_{x \to 0} f(x) =$______________________________
- $\lim_{x \to 2} f(x) =$______________________________

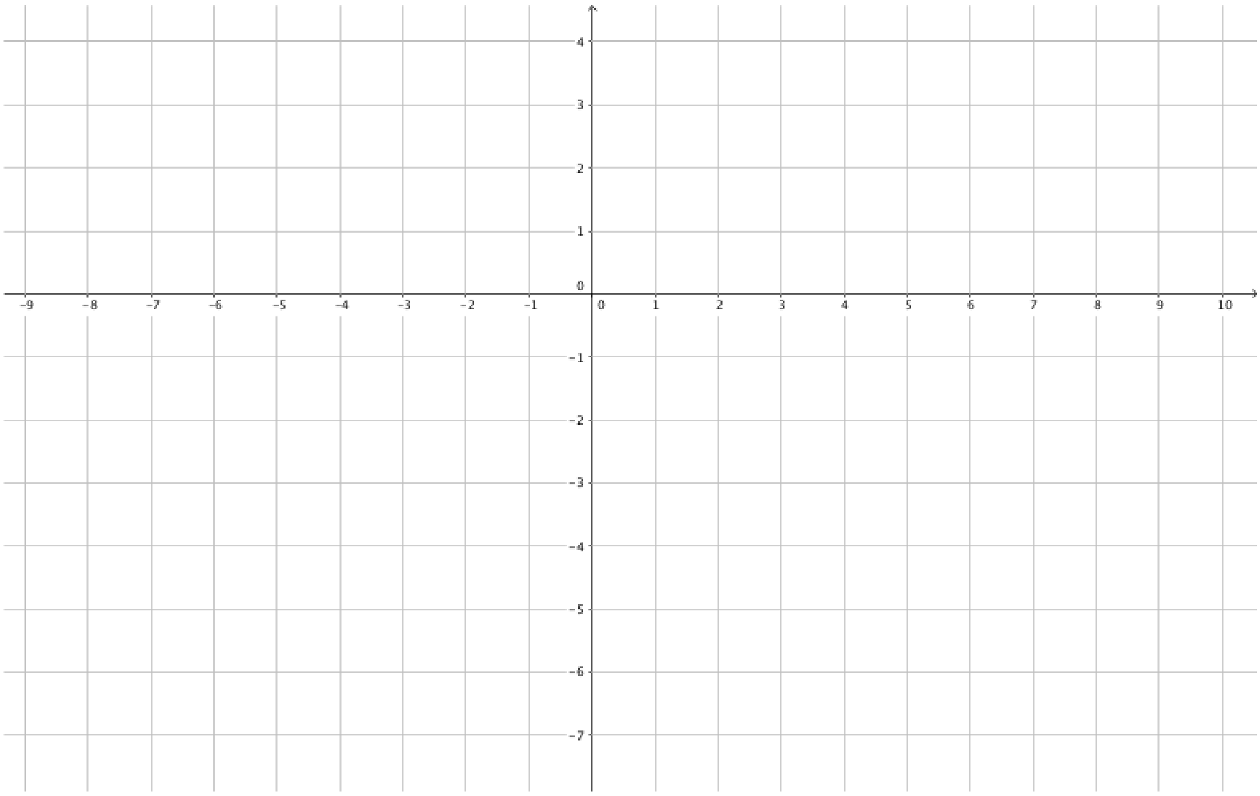
Soluzione: $+\infty$. $-\infty$. 0.

Esercizio 6 (4 punti $\star$)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$



.

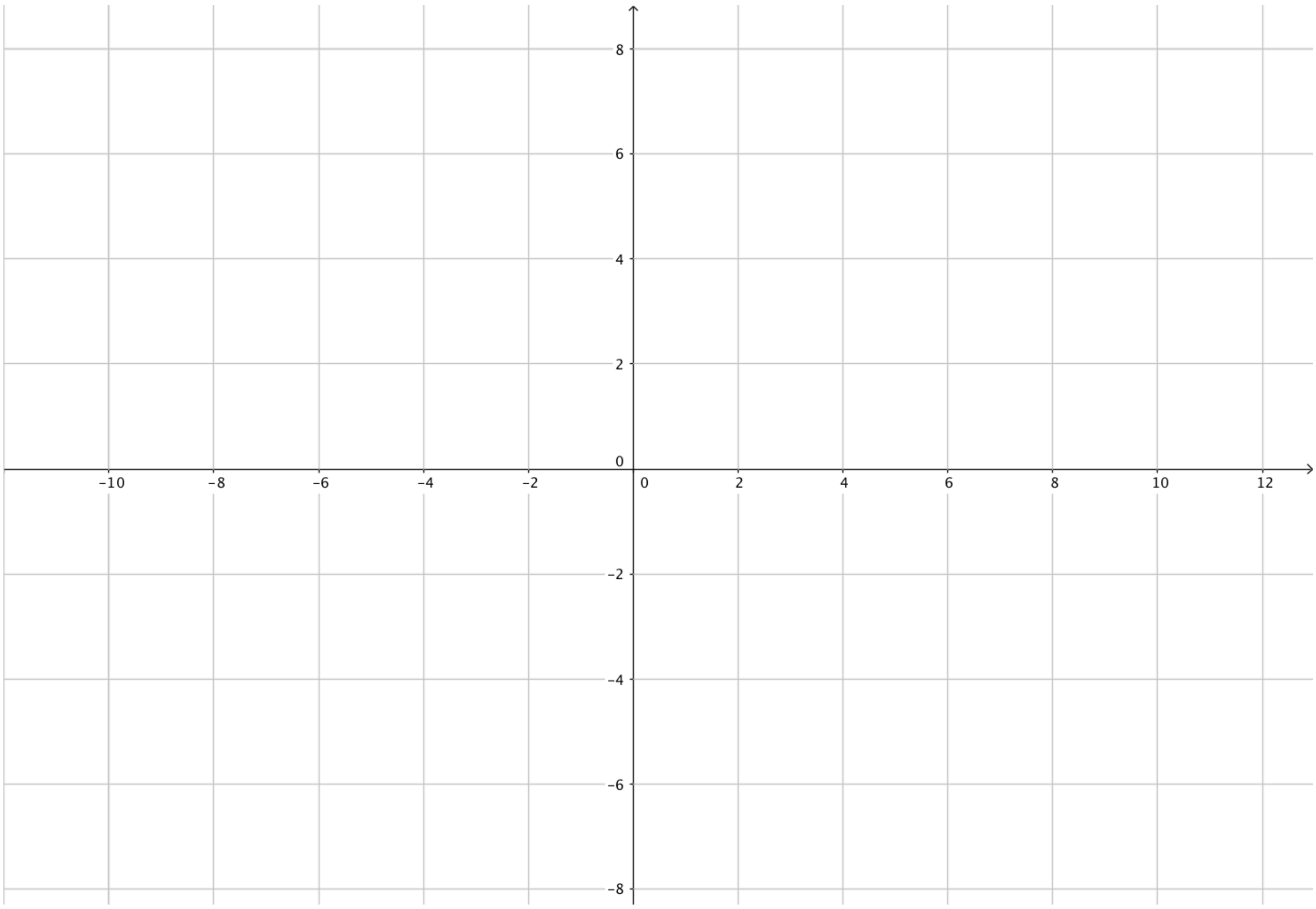
Disegnarne la derivata



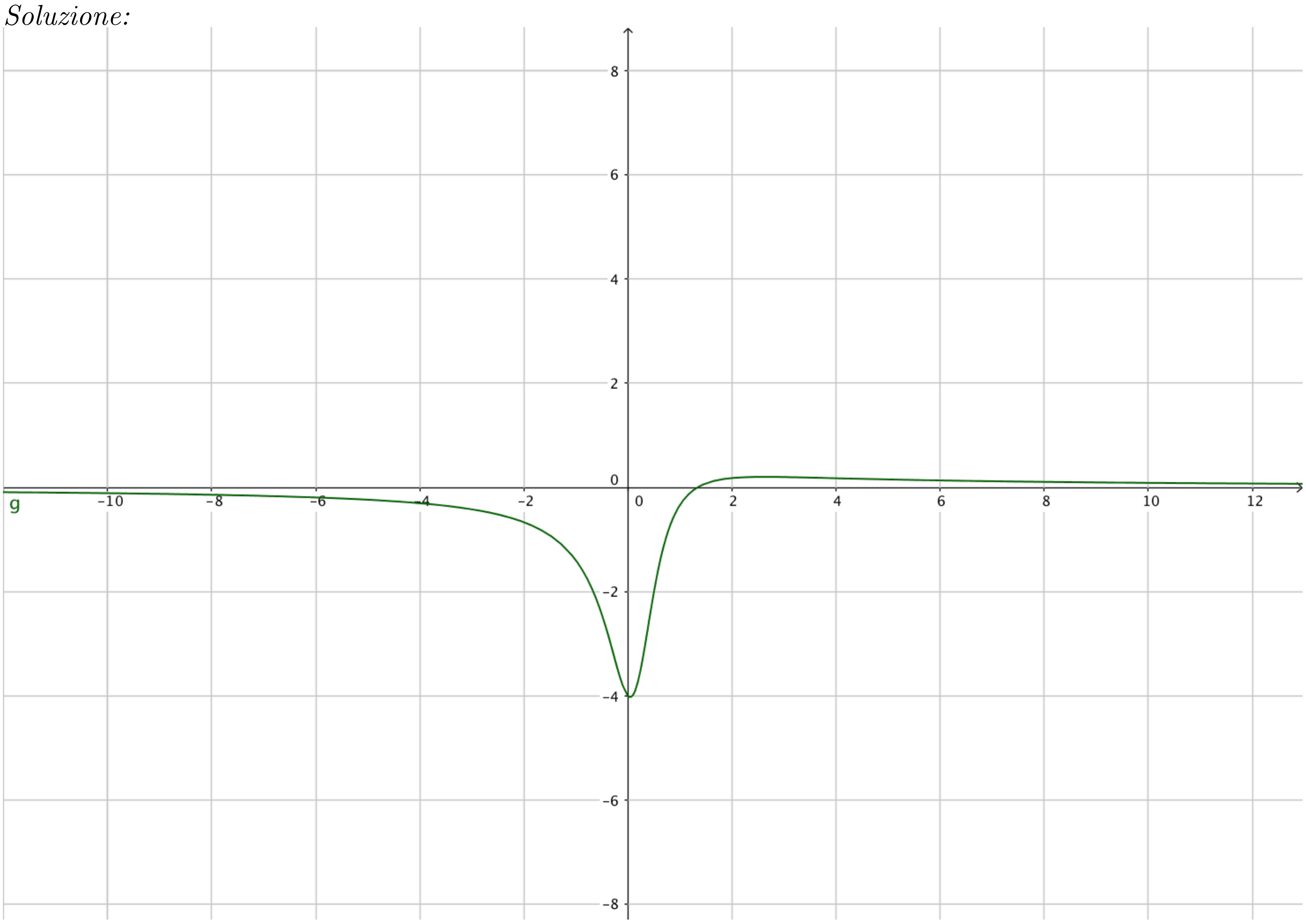
Soluzione:

Esercizio 7 (5 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \frac{3x - 4}{3x^2 - x + 1}$$



Soluzione:



Esercizio 8 (3 punti)**.** Risolvere il seguente limite utilizzando il teorema di de l'Hôpital. Perché è possibile applicare questo teorema?

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big)}{\cos(x)}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big)}{\cos(x)}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}-\frac{\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to\pi/2}-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}=0$$

Esercizio 9 (5 punti $\star$)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2e^x\,dx.$$

Soluzione: Per parti:

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c \tag{1}$$

Esercizio 10 (6 punti)**.** Usare gli integrali per trovare la formula del volume di un cono con altezza h e raggio della base b

Soluzione: Bisogna calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la funzione $f(x)=\frac{bx}{h}$ nell'intervallo $[0,h]$.

$$V=\pi\int_0^h f^2(x)\,dx=\pi\int_0^h\frac{b^2x^2}{h^2}\,dx=\left[\frac{b^2\pi x^3}{3h^2}\right]_0^h=\frac{h\pi b^2}{3}.$$

Esercizio 11 (5 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

Soluzione: La serie è a termini positivi, quindi possiamo usare il criterio della radice.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}-1=0$$

Da ciò segue che la serie converge.

Esercizio 12 (6 punti $\star$)**.** Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$$

Soluzione: Il centro è per definizione 2. Posto $a_n=\frac{1}{(2n-1)2^n}$ abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim_{n\to+\infty}|\frac{(2n-1)2^n}{(2(n+1)-1)2^{n+1}}|=|\frac{(2n-1)}{(2(n+1)-1)2}|=\frac{1}{2},$$

quindi $R=\frac{1}{2}$. Nel caso particolare $x=\frac{5}{2}$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)^n}{(2n-1)2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{-n}}{(2n-1)},$$

e la serie converge per il criterio del rapporto. Nel caso $x=\frac{3}{2}$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1/2)^n}{(2n-1)2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^{-n}}{(2n-1)},$$

che converge per il criterio delle serie a segni alternati. Quindi la serie converge uniformemente per $x\in[3/2,5/2]$.

Esercizio 13 (5 punti $\star$)**.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda 2 - 8\lambda + 15$ ha due radici reali e distinte $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$. La soluzione generale dell'omogenea dunque è $c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$. Cerchiamo una soluzione particolare nella forma $y(x) = Axe^{3x}$. Abbiamo

$$y'(x) = A(3x+1)e^{3x}, y''(x) = A(9x+6)e^{3x}$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$A\left(9x + 6 - 8(3x+1) + 15x\right) e^{3x} = 2e^{3x}$$

quindi $A = -1$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} - xe^{3x}.$$

Calcoliamo $y'(x)$:

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} + 5c_2 e^{5x} - (e^{3x} + 3xe^{3x})$$

e imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= 3c_1 + 5c_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Da cui,

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_2 = -1/2 \\ c_2 &= 1/2. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{5x} - xe^{3x}.$$

Esercizio 14 (5 punti)**.** Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$(x^2+1)y' + y^2 = 0$$

Soluzione: Procediamo separando le variabili:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \iff (x^2+1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \iff \frac{(x^2+1)}{dx} = -\frac{y^2}{dy} \iff \frac{dx}{(x^2+1)} = -\frac{dy}{y^2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)} = -\int \frac{dy}{y^2} &\iff \int \frac{dx}{(x^2+1)} = -\int \frac{dy}{y^2} \\ &\iff \arctan(x) = \frac{1}{y} + c \iff y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + c} \end{aligned}$$