

**III APPELLO ESTIVO DI MATEMATICA PER SCIENZE AMBIENTALI**  
**19/9/2017**

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI,**  
leggere attentamente.

- (1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.
- (2) Voto massimo: **30/30**.
- (3) È possibile ritirarsi dall'esame dopo un'ora dall'inizio.
- (4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- (6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 10)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- (9) **Buon lavoro!**

**Esercizio 1** (3 punti). Dato l'insieme  $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  e l'insieme  $B = \{1, 5, 10, 15, 20\}$ , dire qual è il numero di sottoinsiemi di  $A$  che contengono  $B$ . Motivare la risposta.

*Soluzione:* L'insieme  $B$  contiene 5 elementi, quindi  $A \setminus B$  contiene 15 elementi. Per calcolare il numero di sottoinsiemi di  $A$  contenenti  $B$  basta contare i sottoinsiemi distinti di  $A \setminus B$ . Quindi il numero cercato è  $2^{15}$ .

**Esercizio 2** (5 punti). Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

- (1) Per quali valori di  $k$  il sistema ha una sola soluzione?
- (2) Nei casi in cui la soluzione è unica trovarla con il metodo di Cramer.

*Soluzione:* Il determinante della matrice è  $k^2 - 1$ , quindi il sistema ammette infinite soluzioni per  $k = \pm 1$  e un'unica soluzione per ogni  $k \neq \pm 1$ . In quest'ultimo caso la soluzione è data da  $x = \frac{2k-1}{k^2-1}$  e  $y = \frac{k-2}{k^2-1}$ .

**Esercizio 3** (4 punti). Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\ln \left( \frac{x^2 - 1}{x + 5} \right)}$$

dom( $f$ )= \_\_\_\_\_

*Soluzione:*

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (-5 < x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 3)\}.$$

**Esercizio 4** (4 punti). Sia  $f$  definita da

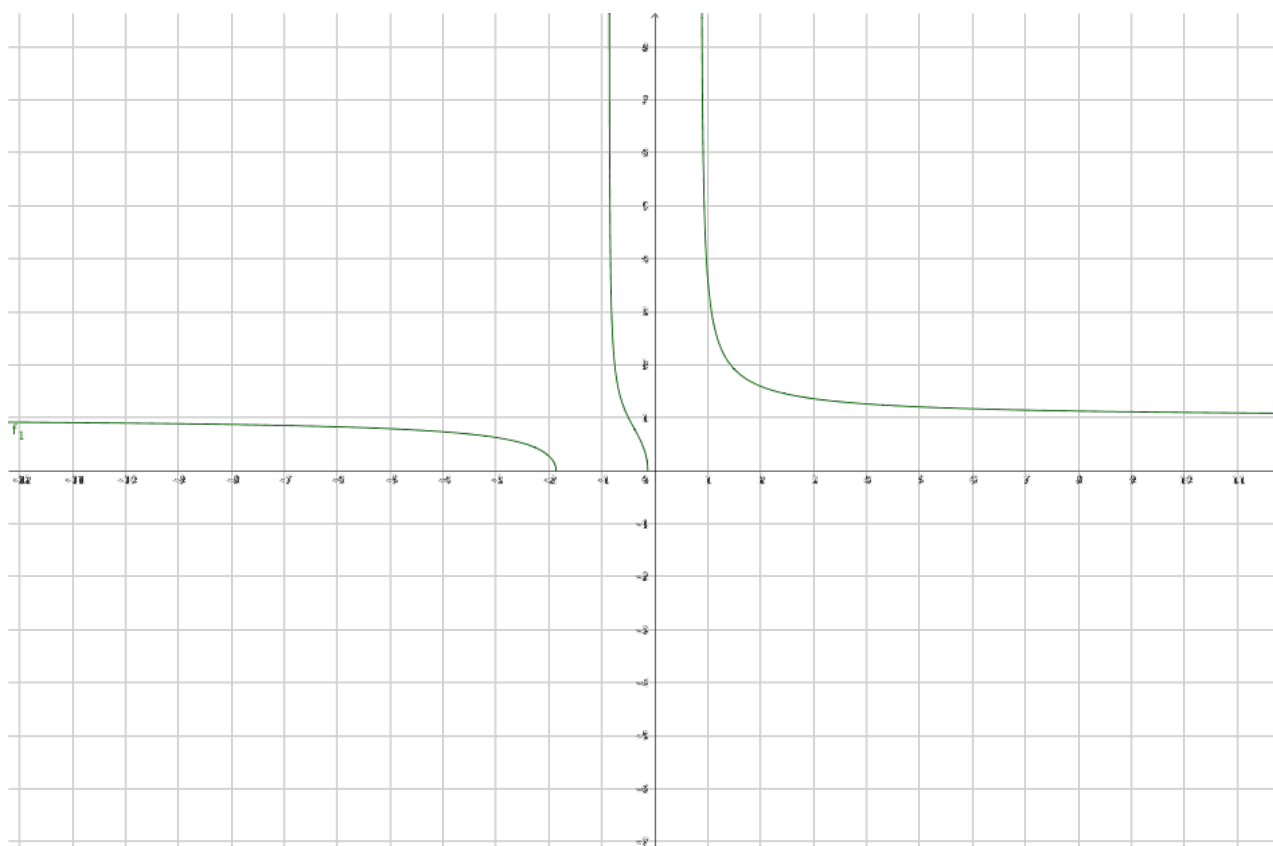
$$f(x) = \sqrt{\ln \left( \frac{x^2 - 1}{x + 5} \right)}$$

Calcolare la derivata di  $f$ .

*Soluzione:*

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 10x + 1)}{2(x + 5)(x^2 - 1)\sqrt{\ln \frac{x^2-1}{x+5}}}$$

**Esercizio 5** (4 punti). Sia  $f$  la funzione descritta dal grafico qui sotto:



Indicare i seguenti limiti:

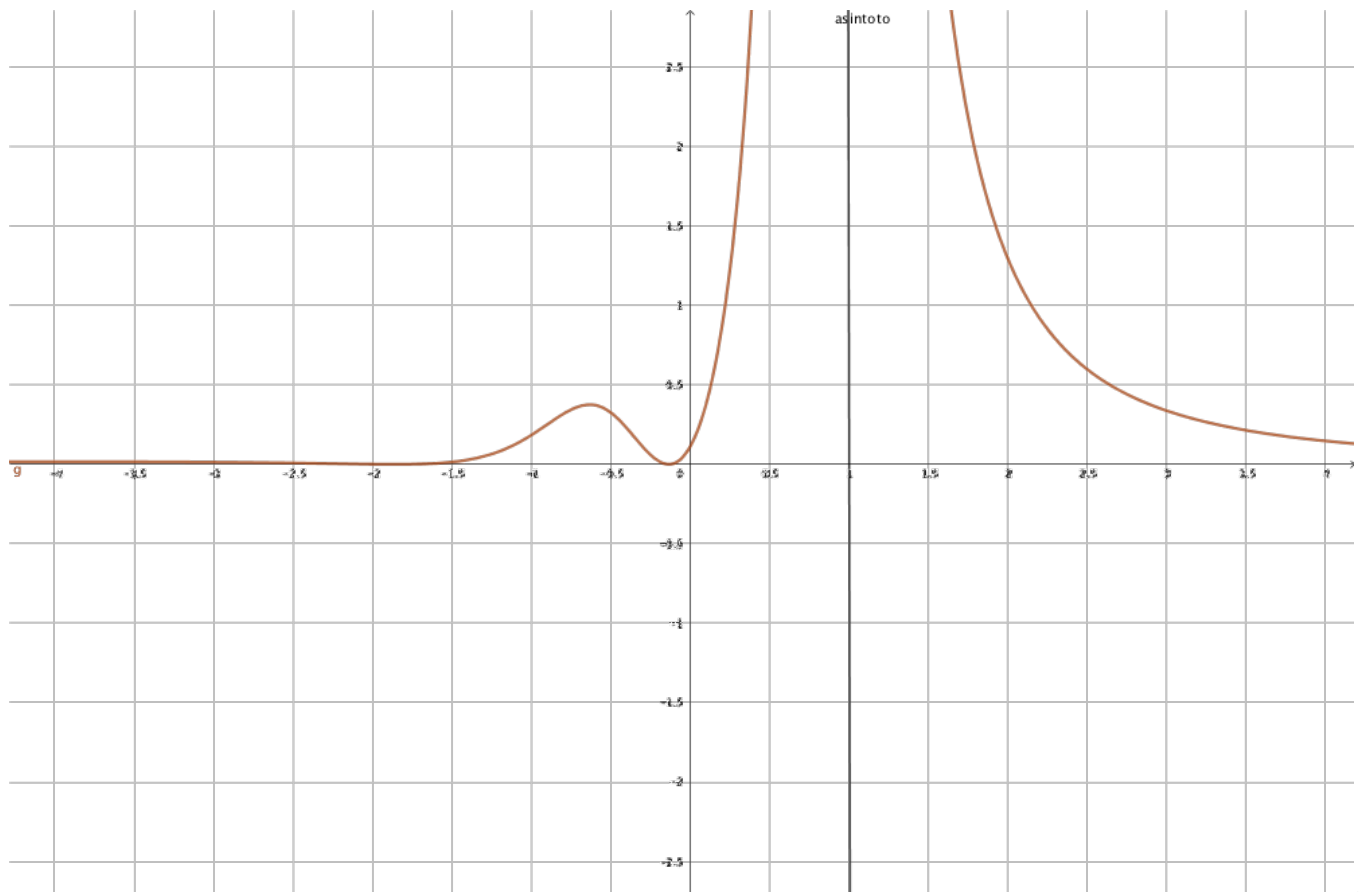
•  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$  \_\_\_\_\_

•  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$  \_\_\_\_\_

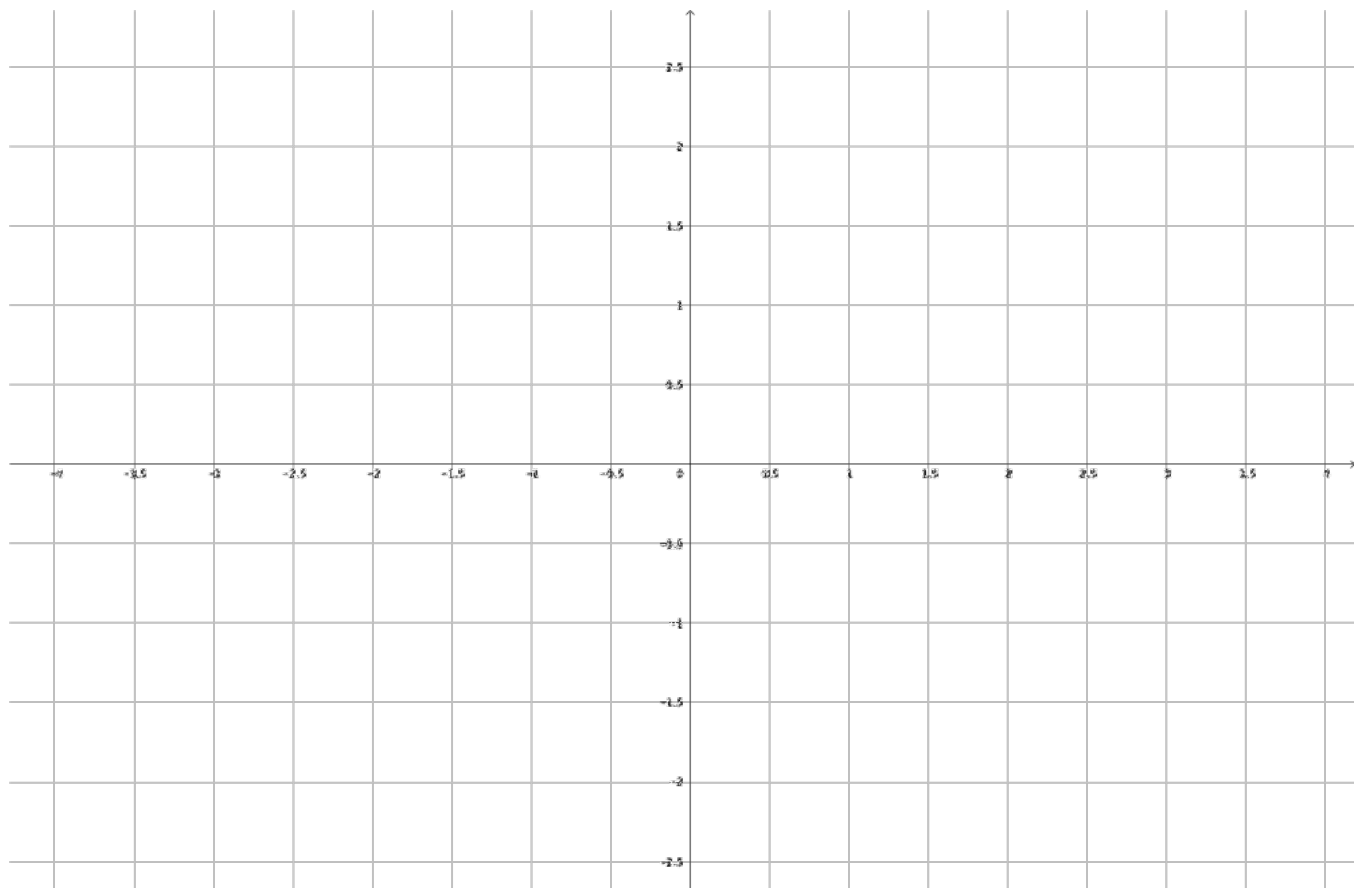
•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$  \_\_\_\_\_

*Soluzione:*  $\exists, +\infty, 1.$

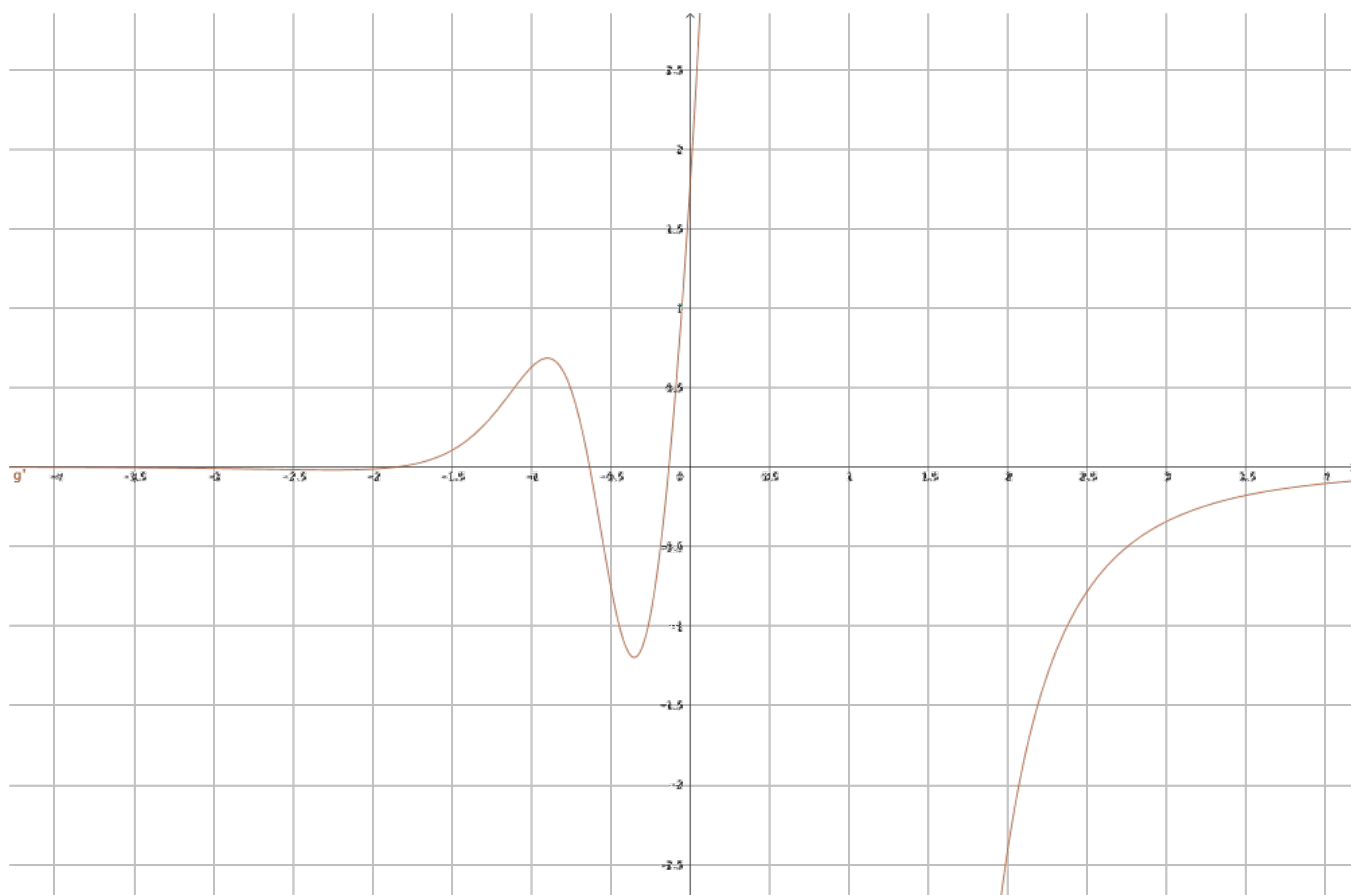
**Esercizio 6** (4 punti). Si consideri il seguente grafico di  $f(x)$



Disegnarne la derivata

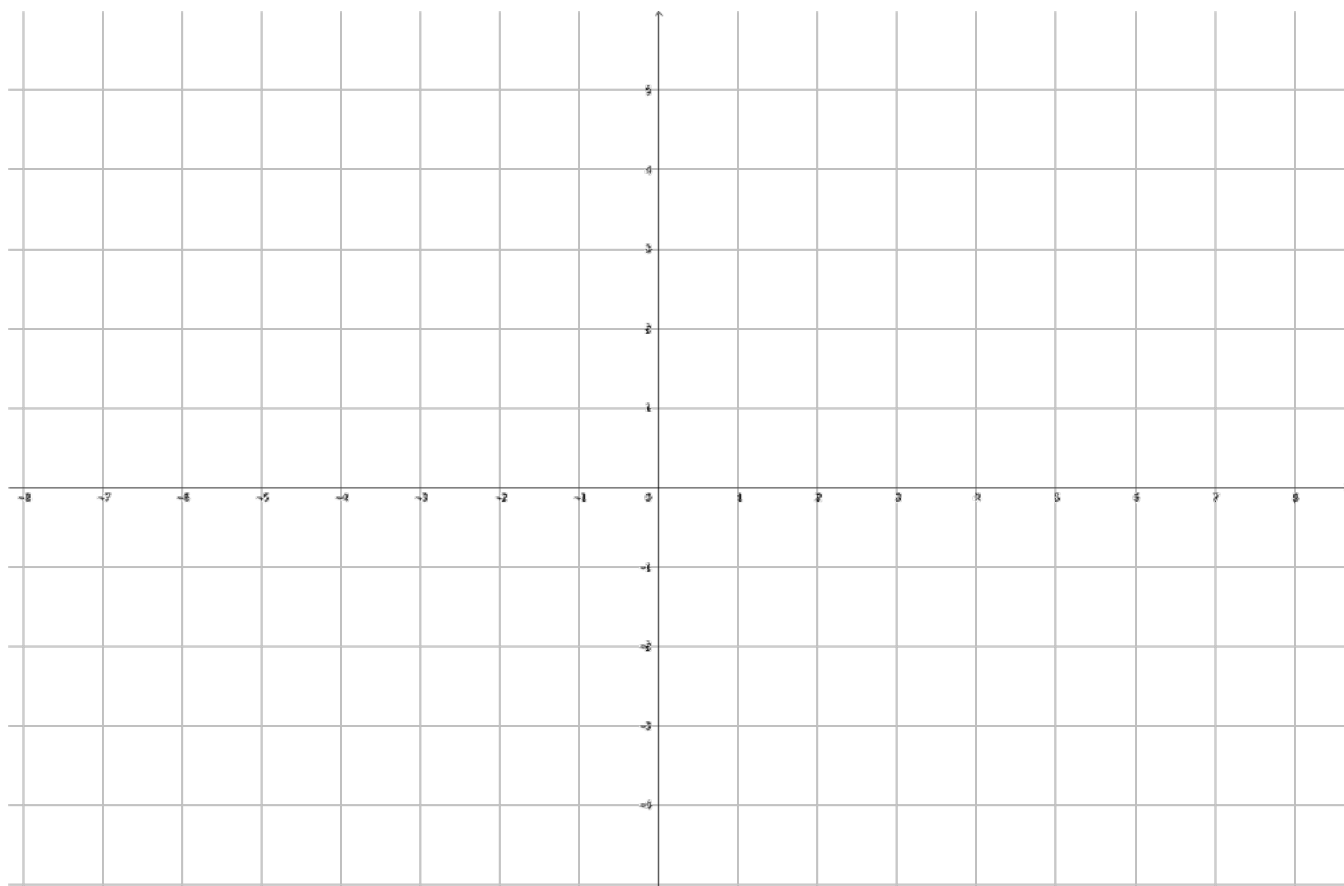


*Soluzione:*

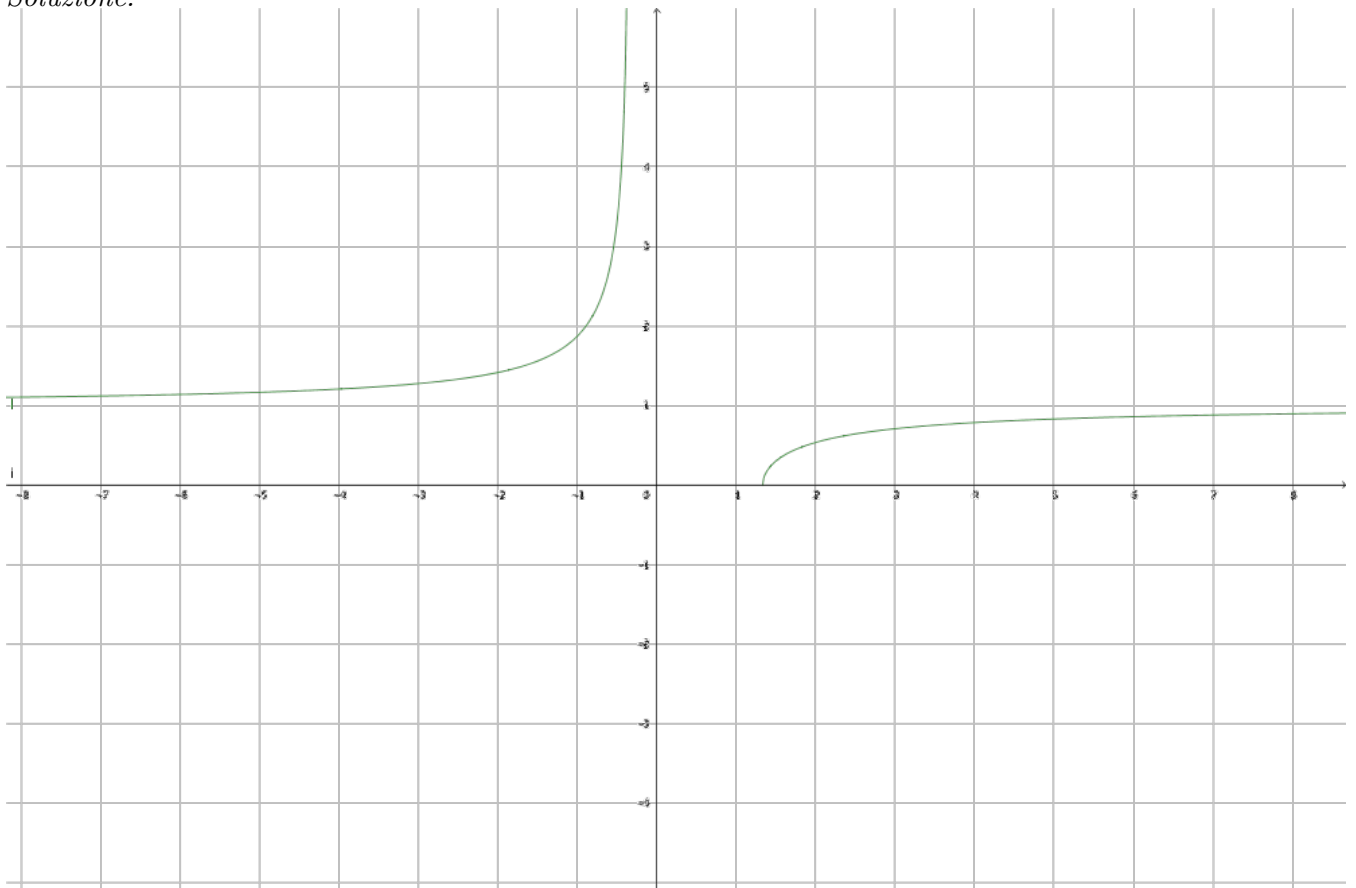


**Esercizio 7** (5 punti). Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 4}{3x + 1}}$$



*Soluzione:*



**Esercizio 8** (3 punti). Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{|x|}$$

*Soluzione:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{1/2}$$