# PRIMA PROVA INTERMEDIA INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2017/18)

TRACCIA A

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

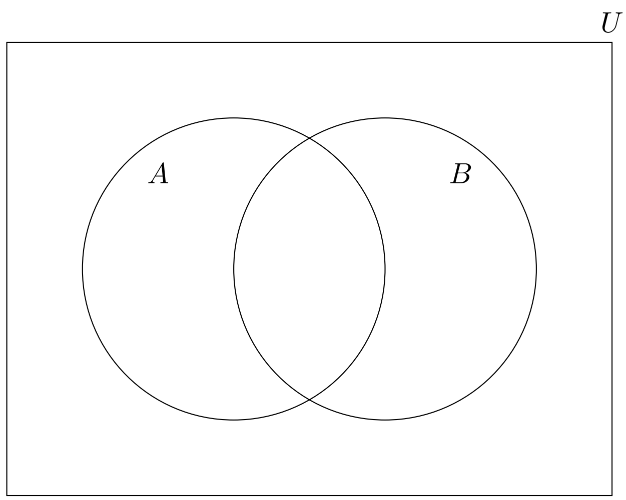
Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

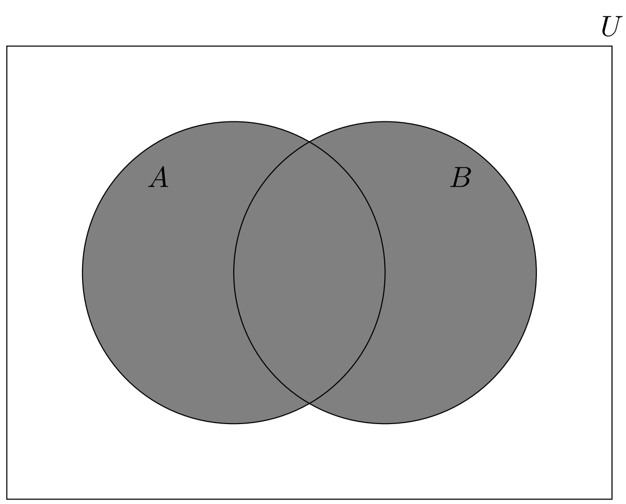
*Date*: 13/10/17.

**Esercizio 1** (3 punti)**.** Colorare il seguente insieme

$$U \setminus ((U \setminus A) \cap (U \setminus B))$$




*Soluzione:*




**Esercizio 2** (6 punti)**.** Decomporre in $\mathbb{C}$ il seguente polinomio di secondo grado in un prodotto di polinomi di primo grado:

$$x^2 + 2ix + i$$

*Soluzione:*

$$x_{1/2} = -i \pm \sqrt{-1-i}$$

Per calcolare $\sqrt{-1-i}$, osserviamo che $-1-i = \sqrt{2}(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{4}\pi))$, quindi

$$\sqrt{-1-i} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right) \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13}{8}\pi\right)\right) \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} x^2 + 2ix + 2i &= \left(x - \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)\right)\left(x - \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13}{8}\pi\right)\right)\right) \\ &= (x + 0,45 - 1,1i)(x - 0,45 + 1,1i) \end{aligned}$$

**Esercizio 3** (5 punti)**.** Descrivere il dominio della seguente funzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}(x+2)}}{\log(x^2-1)}$$

*Soluzione:* $Dom(f) =$

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x < -1 \vee 1 < x \le \pi{-}2 \vee 2k\pi{-}2 \le x \le (2k{+}1)\pi{-}2 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\Big\}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

**Esercizio 4** (6 punti)**.** Trovare i valori reali di $x$ che soddisfano la seguente disequazione.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 1} < x - 5$$

*Soluzione:* La disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 1 < (x-5)^2 \\ x - 5 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 2 - \sqrt{3} \ \vee \ x \ge 2 + \sqrt{3} \\ 6x - 24 < 0 \\ x \ge 5 \end{cases}$$

Quindi la disequazione non è valida per nessuna $x$.

**Esercizio 5** (6 punti)**.** Dimostrare per induzione che $n(n+1)(n+2)$ è divisibile per 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

*suggerimento*: dire che è divisibile per tre equivale a dire che per ogni $n$ esiste un $k$ tale che $n(n+1)(n+2) = 3k$.

*Soluzione:* Per $n = 1$ si ha $1{\cdot}2{\cdot}3 = 3k$, che è vero per $k = 2$. Ora supponiamo che esista un $k$ tale che $n(n{+}1)(n{+}2) = 3k$ e mostriamo che allora esiste un $l$ tale che $(n{+}1)(n{+}2)(n{+}3) = 3l$. Il primo membro dell'equazione si può riscrivere come $n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)$. Utilizzando l'ipotesi induttiva questo diventa $3k+3(n+1)(n+2) = 3((n+1)(n+2)+k)$. Quindi l'asserto risulta vero per $l = (n+1)(n+2)+k$.

**Esercizio 6** (4 punti)**.** Scrivere l'equazione della retta parallela a $3y = 5x + 1$ e passante per $P = (0,2)$.

*Soluzione:*

$$y = \frac{5}{3}x + 2.$$