PRIMA PROVA INTERMEDIA INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2017/18)

TRACCIA B

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

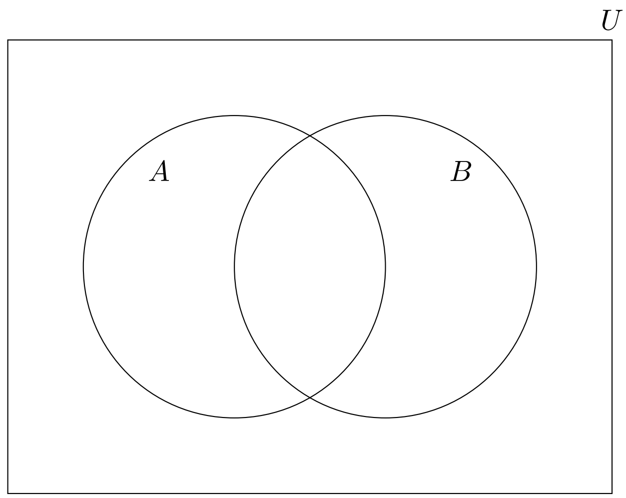
Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

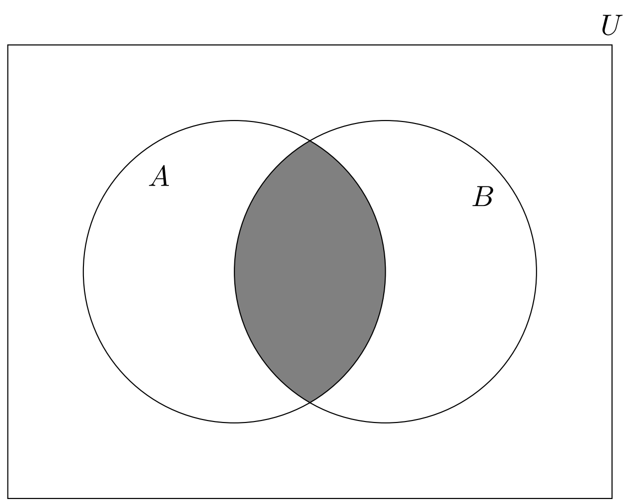
Date: 13/10/17.

Esercizio 1 (3 punti)**.** Colorare il seguente insieme

$$((U \setminus A) \cup B) \cap A$$



Soluzione:



Esercizio 2 (6 punti)**.** Trovare tutte le radici quarte in $\mathbb{C}$ del seguente numero complesso

$$3 - 3i$$

Soluzione: Osserviamo che

$$3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

Quindi le soluzioni sono:

$$x_1 = \sqrt[4]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$$
$$x_1 = \sqrt[4]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)$$
$$x_1 = \sqrt[4]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right)$$
$$x_1 = \sqrt[4]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Descrivere il dominio della seguente funzione.

$$f(x) = \frac{\log(\mathrm{sen}(x-5))}{e^{x^2} - e^x}$$

Soluzione:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 + 2k\pi < x < 2k\pi + \pi + 5 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0, 1\}$$

Esercizio 4 (6 punti)**.** Trovare i valori reali di x che soddisfano la seguente disequazione.

$$\log_2(x^2 + 3x + 5) > \log_2(x+3) - 1$$

Soluzione: Il primo logaritmo è sempre definito, mentre il secondo lo è per $x > -3$. La disequazione è equivalente a:

$$\log_2(x^2 + 3x + 5) - \log_2(x+3) > -1$$
$$\log_2\left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x+3}\right) > -1$$
$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x+3} > 2^{-1}$$
$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x+3} + \frac{1}{2} > 0$$
$$\frac{2x^2 + 7x + 13}{2x+6} > 0$$

Poiché il numeratore è sempre maggiore di 0, la disequazione risulta valida per ogni $x > -3$.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Soluzione: Per $n = 1$ si ha $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, che è vero.

Ora supponiamo che valga

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e mostriamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Il primo membro dell'equazione si può riscrivere come

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva questo diventa

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{(n+1)+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

Esercizio 6 (4 punti)**.** Scrivere l'equazione della retta parallela a $2y = 1x + 3$ e passante per $P = (1, 5)$.

Soluzione:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}.$$