SECONDA PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA — TRACCIA A

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 24 novembre 2017.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Calcolare il limite della successione definita come segue:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \end{cases}$$

Soluzione: Si comincia dimostrando per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 1$. Ne deriva che $a_n > a_{n+1}$. Dunque la successione è limitata e strettamente decrescente, quindi converge. Passando ai limiti nella traccia si ha $l = \sqrt{l}$ che è vera se e soltanto se $l = 1$ o se $l = 0$. Ma il secondo caso è escluso dal teorema della permanenza del segno.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2} \log_2 \left(\left(x^2 - 3x + 3\right)^{\frac{1}{x-1}} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 2} \log_2 \left(\left(x^2 - 3x + 3\right)^{\frac{1}{x-1}} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} \log_2 \left(\left(x^2 - 3x + 3\right)^{\frac{1}{(x-1)}} \right)^{\frac{1}{(x-2)}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x^2 - 3x + 2)} \log_2 \left(x^2 - 3x + 3\right) = \lim_{x\to 2} \frac{\log_2 \left(1 + x^2 - 3x + 2\right)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{\log 2}$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{\log(x^3 - x + 1)}$$

Soluzione: Il limite si presenta in una forma $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Quindi è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital ottenendo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{\log(x^3 - x + 1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 6x + 4}{\frac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(3x^2 - 6x + 4)(x^3 - x + 1)}{3x^2 - 1} = +\infty$$

Esercizio 4 (10 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right)$$

Non calcolare la derivata seconda.

Soluzione: Il dominio è: $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ o } 1 < x < 2 \text{ o } x > 4\}$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right) = 0 \qquad \lim_{x\to -2^-} \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right) = -\infty$$

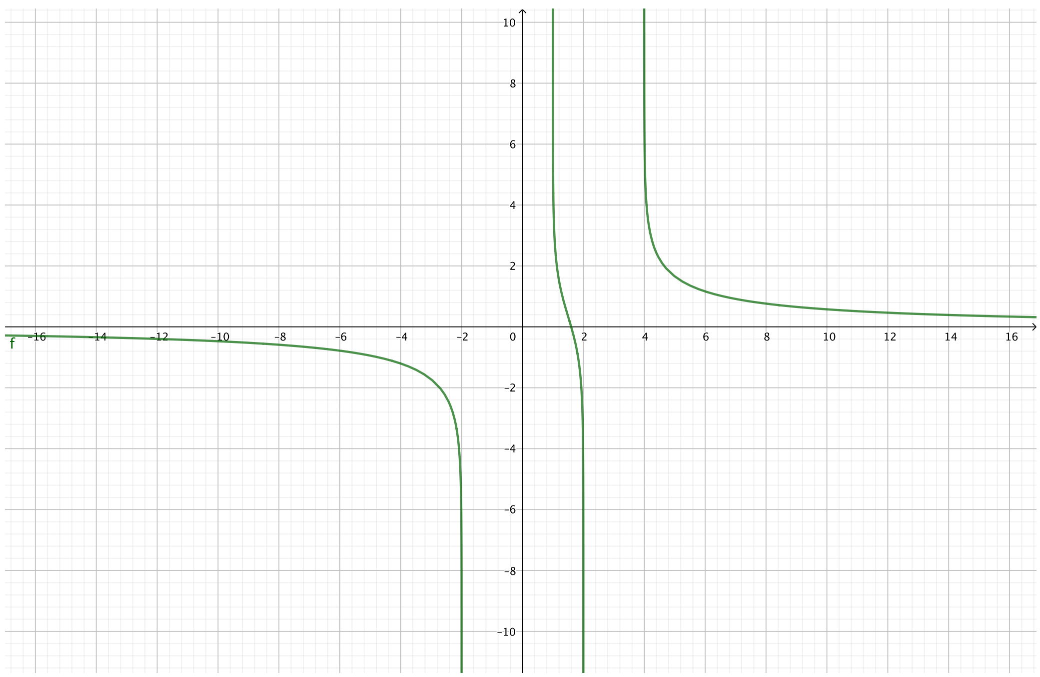
$$\lim_{x\to 1^+} \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \log \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} \right) = +\infty$$

La derivata prima è

$$\left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right)\frac{2x(x^2-5x+4)-(2x-5)(x^2-4)}{(x^2-5x+4)^2} =$$
$$= \left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right)\frac{2x^3-10x^2+8x-2x^3+8x+5x^2-20}{(x^2-5x+4)^2} =$$
$$= \left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right)\frac{-5x^2+16x-20}{(x^2-5x+4)^2} =$$

I punti in cui tale derivata è maggiore di zero sono tutti fuori dal dominio, quindi la funzione è sempre decrescente.



Esercizio 5 (6 punti)**.** Calcolare la seguente derivata

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\frac{x^2-2}{3x^3}\right)\right)$$

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{\frac{6x^5-9x^4+18x^2}{3x^6}}{\left(1+\log^2\left(\frac{x^2-2}{3x^3}\right)\right)\left(\frac{x^2-2}{3x^3}\right)} = \frac{6x^5-9x^4+18x^2}{(3x^4-6x^2)\left(1+\log^2\left(\frac{x^2-2}{3x^3}\right)\right)}$$

$$= \frac{6x^3-9x^2+18}{(3x^2-6)\left(1+\log^2\left(\frac{x^2-2}{3x^3}\right)\right)}$$