SECONDA PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA — TRACCIA B

Nome:	____________________
Cognome:	____________________
Matricola:	____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 24 novembre 2017.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Calcolare il limite della successione definita come segue:

$$\begin{cases} a_0 = 13 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \end{cases}$$

Soluzione: Si comincia dimostrando per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$. Ne deriva che $a_n + 1 > 0$, quindi $a_n > a_{n+1}$. Dunque la successione è limitata e strettamente decrescente, quindi converge. Passando ai limiti nella traccia si ha $l = \frac{l}{l+1}$ che è vera se e soltanto se $l = 0$.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \log(\cos(x))}{x^2}$$

Soluzione: Applicando il teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \log(\cos(x))}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}(x)}{2x\cos(x)} = +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \left[1 + \operatorname{sen}\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{(\log(x) + 1)^2}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \operatorname{sen}\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{(\log(x) + 1)^2} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{\log(x)+1}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\log\left(x^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{\log(x)+1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{\log(x)+1}{x}\right)}{\left(\frac{\log(x)+1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

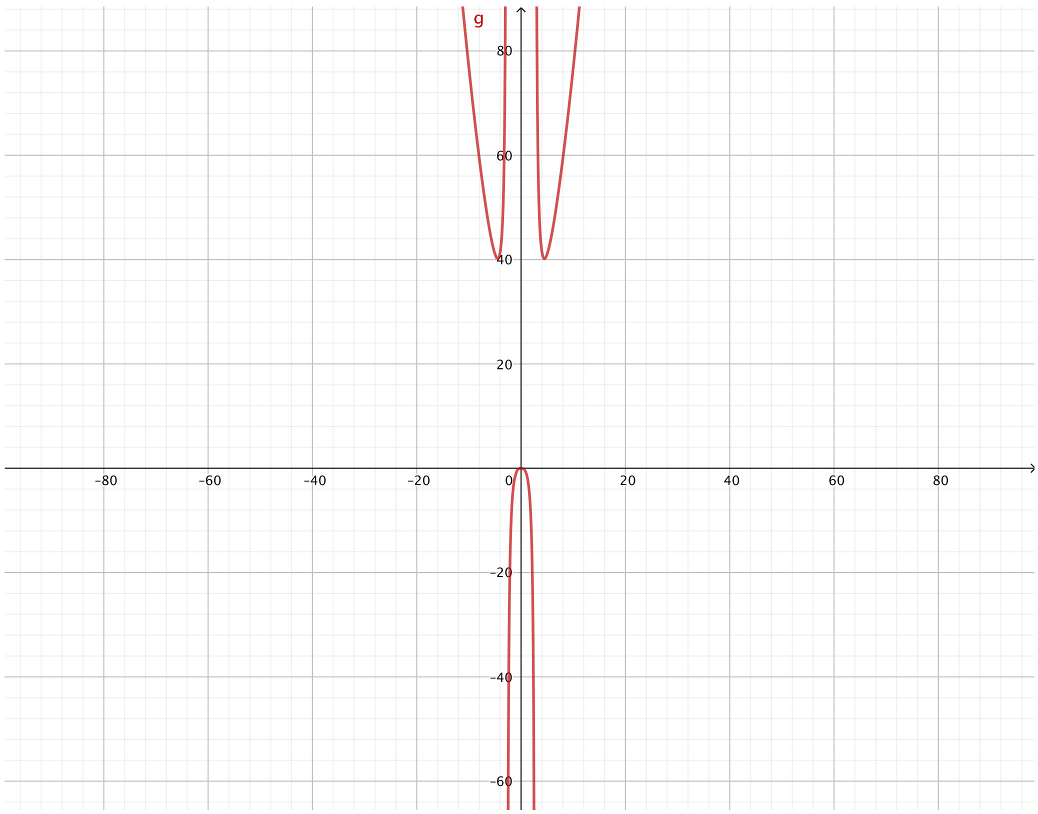
Esercizio 4 (10 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$\frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

Non calcolare la derivata seconda.

Soluzione: Il dominio della funzione è $R \setminus \{-e, 0, e\}$. La funzione è pari.

La derivata per $x > 0$ è $f'(x) = \frac{2x(\log(x)-1)-x}{(\log(x)-1)^2} = \frac{x(\log(x)-3)}{(\log(x)-1)^2}$. Quindi ci sono punti di minimo locale a $x = \pm e^{3/2}$.


g
80
60
40
20
−80
−60
−40
−20
0
20
40
60
80
−20
−40
−60

Esercizio 5 (6 punti)**.** Calcolare la seguente derivata

$$f(x) = \log\left(\sqrt{(x^2+3)^3} + \sqrt{(x^2+3)^5}\right)$$

Soluzione: La funzione si può riscrivere come

$$f(x) = \log\left((x^2+3)^{3/2} + (x^2+3)^{5/2}\right)$$

Quindi la derivata è

$$f'(x) = \frac{3x\sqrt{(x^2+3)} + 5x\sqrt{(x^2+3)^3}}{\sqrt{(x^2+3)^3} + \sqrt{(x^2+3)^5}} = \frac{3x + 5x(x^2+3)}{x^2+3+(x^2+3)^2}$$