

APPELLO DI MATEMATICA 1 E 2 PER SCIENZE AMBIENTALI E VCA
7/11/2017

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

Matematica 1

Matematica 2

Matematica 1 e 2

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

- (1) Indicare chiaramente qui sopra quale esame si vuole sostenere. In mancanza di indicazioni il compito **non verrà corretto**.
- (2) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 1 deve risolvere gli esercizi da 1 a 7.
- (3) Chi vuole sostenere l'esame di Matematica 2 deve risolvere gli esercizi da 8 a 13.
- (4) Chi vuole sostenere gli esami di Matematica 1 e 2 deve risolvere gli esercizi con il simbolo \star .
- (5) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.
- (6) Voto massimo: **30/30**.
- (7) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.
- (8) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (9) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- (10) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (11) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (12) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 14)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- (13) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti ★). Dato un campione di 10 scoiattoli maschi e 10 femmine, bisogna selezionare 4 esemplari maschili e 4 femminili. Quante diverse scelte sono possibili? Motivare la risposta.

Soluzione: Il numero di tutte le possibili scelte di 4 tra 10 è dato da $\binom{10}{4}$. Quindi il numero delle possibili scelte è dato da $2\binom{10}{4}\binom{10}{4}$.

Esercizio 2 (5 punti ★). Trovare gli autovalori e autovettori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Polinomio caratteristico: $\lambda^2 - 2\lambda + 2$. Autovalori: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Autovettori $v_1 = ((0, 1)$, $v_2 = (-1, 2)$.

Esercizio 3 (4 punti ★). Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\log \log (x^2 + 2x)}{\operatorname{sen}(x + 2)}$$

$\operatorname{dom}(f) =$ _____

Soluzione: $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -1 - \sqrt{2} \vee x > -1 + \sqrt{2}) \wedge x \neq k\pi - 2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 4 (5 punti). Sia f definita da

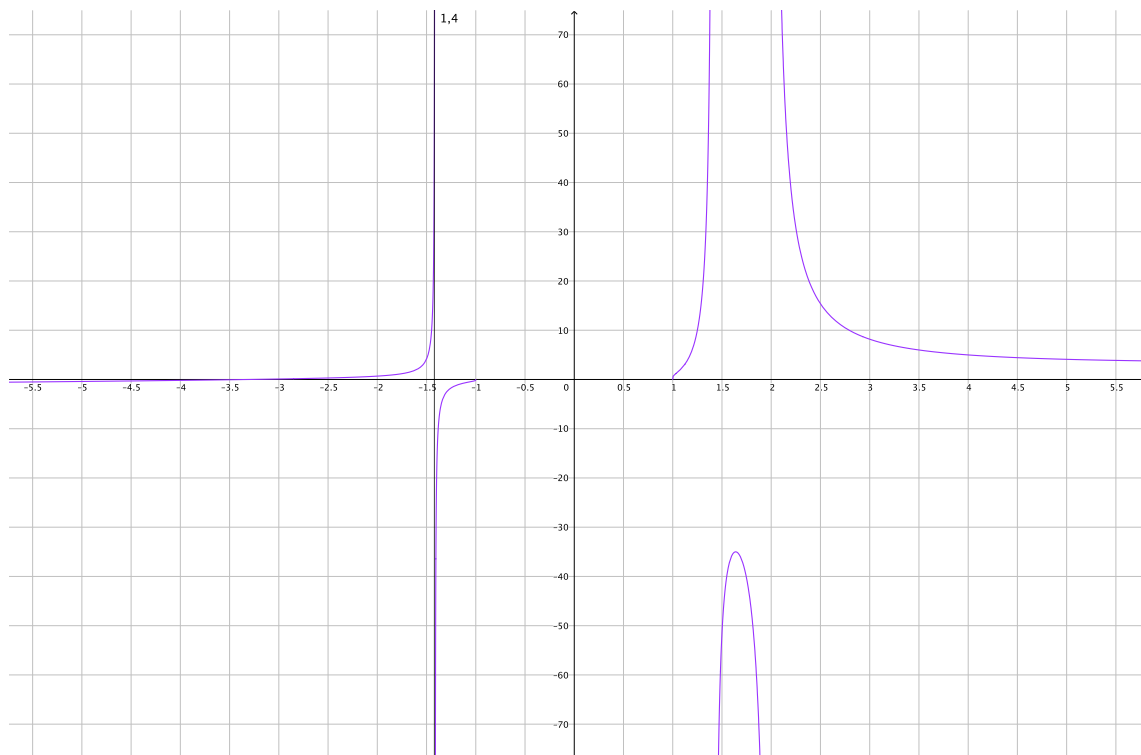
$$f(x) = \frac{\log \log (x^2 + 2x)}{e^{2x}}.$$

Calcolare la derivata di f .

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \left(\frac{2x+2}{(x^2+2x) \ln(x^2+2x)} \right) - 2e^{2x} \log \log (x^2 + 2x)}{e^{4x}} = \frac{\frac{2x+2}{(x^2+2x) \ln(x^2+2x)} - 2 \log \log (x^2 + 2x)}{e^{2x}}.$$

Esercizio 5 (4 punti ★). Sia f la funzione descritta dal grafico qui sotto:



Indicare i seguenti limiti:

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ _____

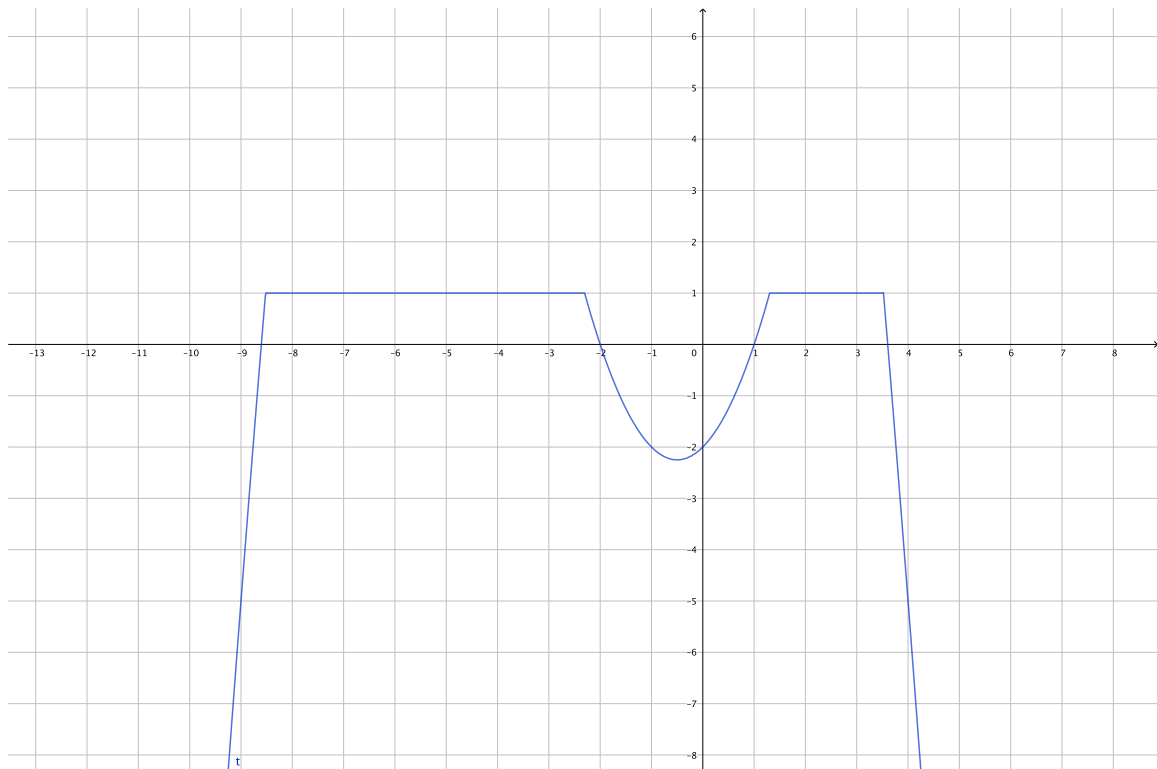
• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____

• $\lim_{x \rightarrow -1,4^-} f(x) =$ _____

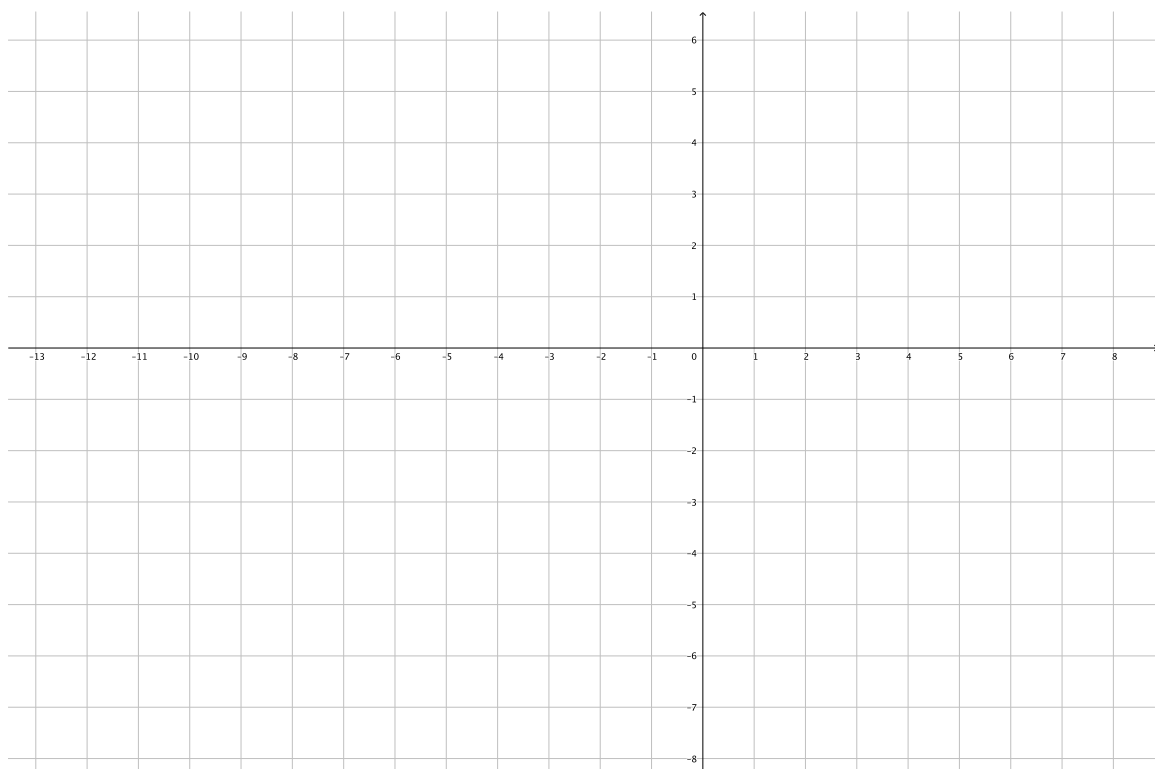
• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ _____

Soluzione: Non esiste. Non esiste. $+\infty$. 0.

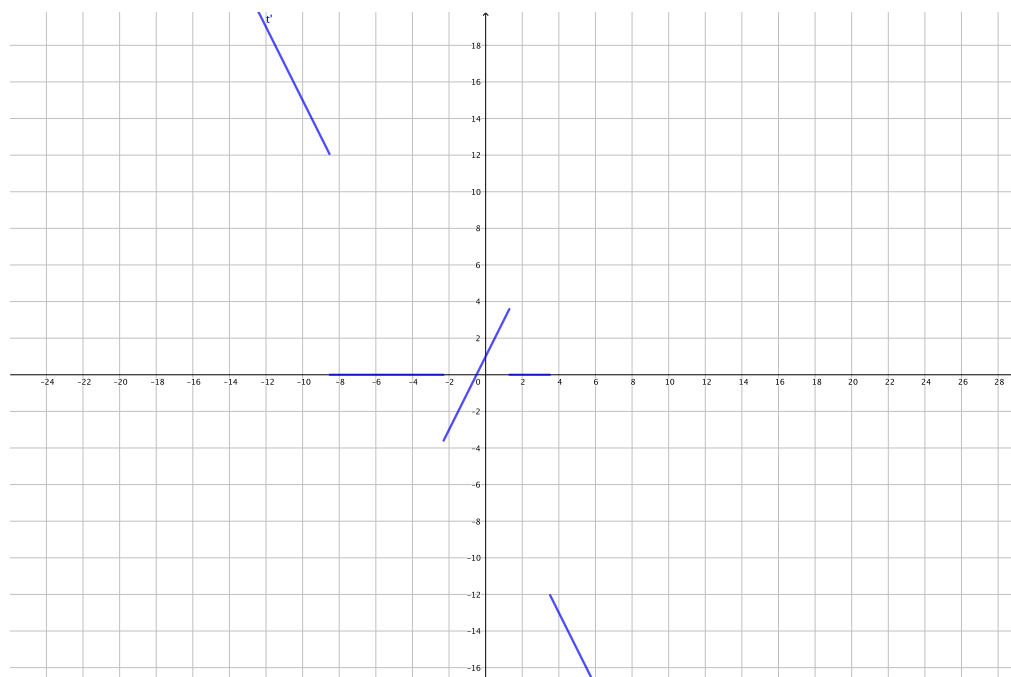
Esercizio 6 (4 punti). Si consideri il seguente grafico di $f(x)$



Disegnarne la derivata

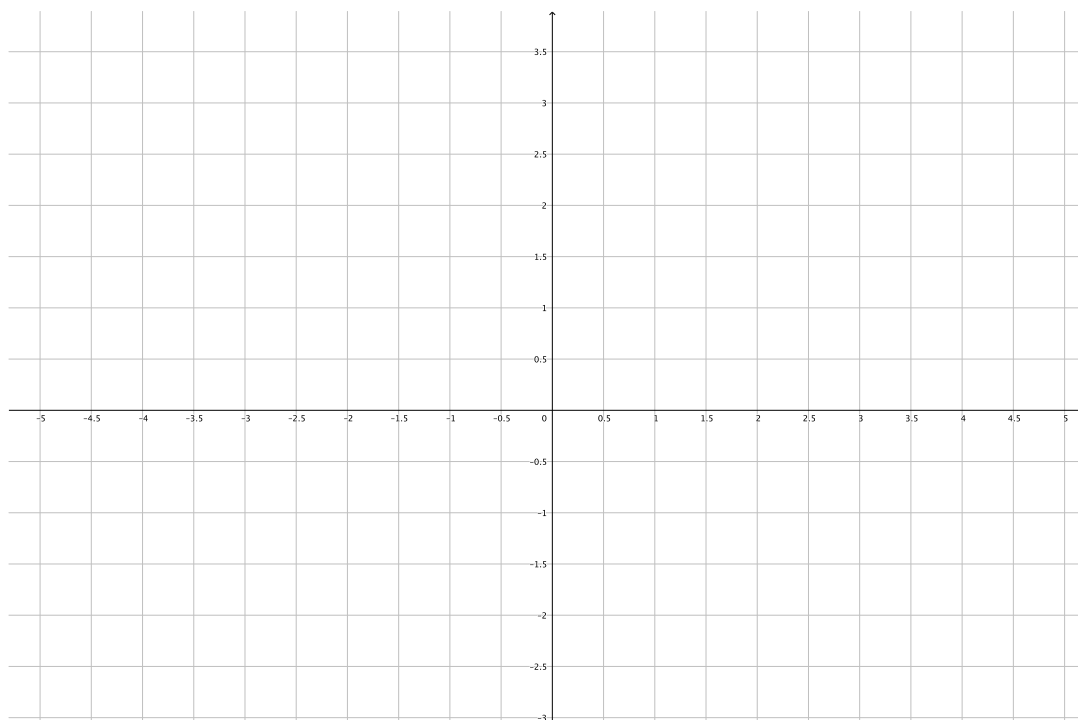


Soluzione:

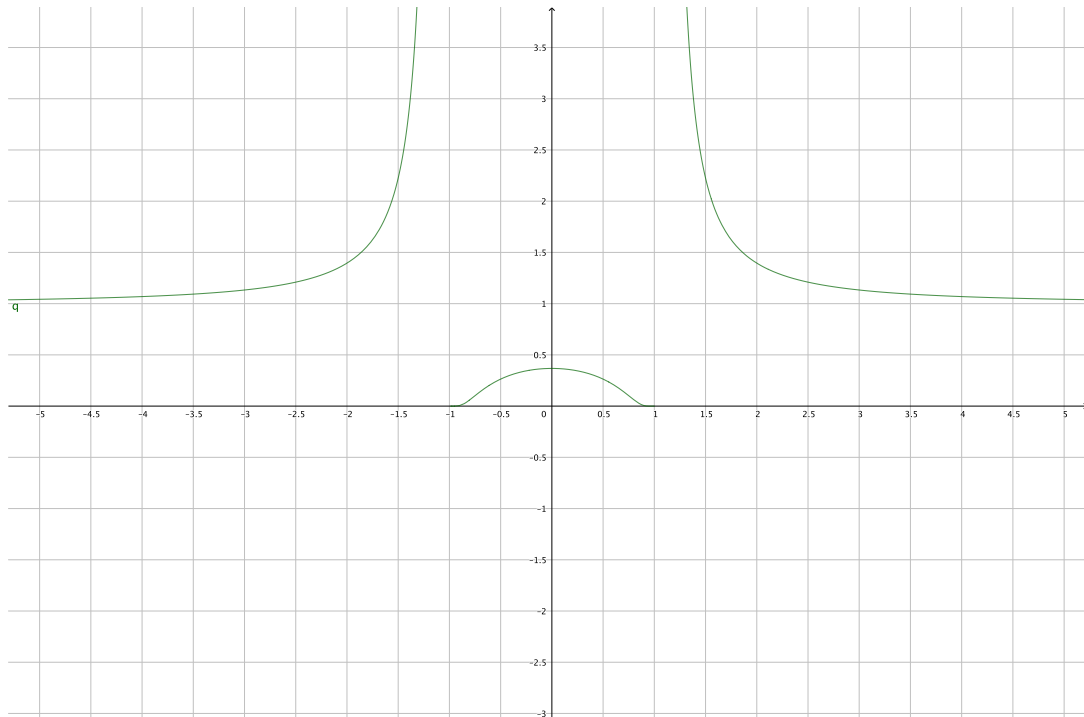


Esercizio 7 (5 punti). Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$$



Soluzione:



Esercizio 8 (5 punti ★). Si risolva l'equazione differenziale

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$$

Soluzione:

Esercizio 9 (5 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{-y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Esercizio 10 (5 punti ★). Dare la definizione di somma parziale e di somma di una serie. Indicata con S_n la somma parziale di indice n , calcolare S_3 per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

Si determini inoltre il carattere di tale serie.

Soluzione:

Esercizio 11 (5 punti). Determinare l'area compresa tra le curve $f(x) = \frac{x^2}{3}$ e $g(x) = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

Soluzione:

Esercizio 12 (5 punti ★). Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int t \log t dt$$

Soluzione:

Esercizio 13 (5 punti). Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 4$ centrato in $x_0 = -1$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Soluzione: