TERZA PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA — TRACCIA A

Nome: ______________________
Cognome: ______________________
Matricola: ______________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 22/12/17.

Esercizio 1 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^n}$$

Soluzione: La serie è a termini non negativi, quindi possiamo usare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Quindi la serie converge.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Soluzione: La serie è a termini positivi, quindi possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

Quindi la serie diverge.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} dx$$

Soluzione: L'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Imponiamo dunque l'uguaglianza

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

Quindi deve essere $A + B = 2$ e $2A + B = -5$, dunque otteniamo $A = -7$ e $B = 9$. Possiamo proseguire nella risoluzione dell'integrale

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} dx = -\int \frac{7}{x-1} dx + \int \frac{9}{x-2} dx = -7\log|x-1| + 9\log|x-2| + c$$

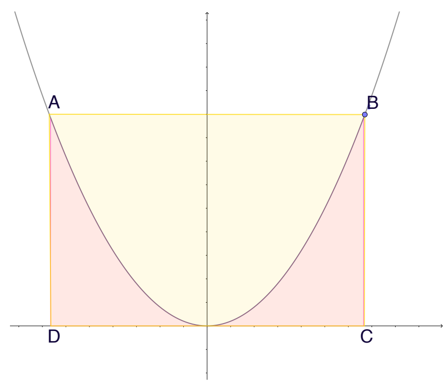
Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx$$

Soluzione: Operiamo la sostituzione $e^x - 1 = t^2$, da cui otteniamo $x = \log(1+t^2)$ e quindi $dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x-1} dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt \\ &= 2\int 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = 2(t - \operatorname{arctg} t) + c \\ &= 2(\sqrt{e^x-1} - \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1})) + d \end{aligned}$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Calcolare l'area dell'intersezione tra la parabola e il rettangolo $ABCD$ in figura, sapendo che la parabola ha equazione $f(x) = x^2$ e il punto B ha ascissa k.



Soluzione: Il punto B ha coordinate (k, k^2), dunque il rettangolo ha area $2k \cdot k^2$. Inoltre l'area in rosa è data da $\int_{-k}^{k} x^2 dx$. L'area dell'intersezione è dunque data da

$$2k^3 - \int_{-k}^{k} x^2 dx = 2k^3 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-k}^{k} = 2k^3 - \frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{3} = \frac{4k^3}{3}$$