TERZA PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA — TRACCIA B

Nome: ________________________________

Cognome: ________________________________

Matricola: ________________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 22/12/17.

Esercizio 1 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

Soluzione: La serie è a segni alterni, quindi possiamo usare il criterio di Leibniz:

(1) $\frac{1}{n^2}$ è decrescente,
(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Quindi la serie converge.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^5\alpha^n$$

(Se così è troppo difficile, si può in alternativa trovare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}n^5 3^n$; punti: 5.)

Soluzione: Se $|\alpha|\le 1$ la serie converge poiché converge assolutamente. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|n^5\alpha^n|=\sum_{n=1}^{+\infty}n^5|\alpha|^n$$

è a termini non negativi, quindi possiamo usare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^5|\alpha|^n}=\lim_{n\to+\infty}|\alpha|n^{\frac{5}{n}}=\lim_{n\to+\infty}|\alpha|e^{\log(n^{\frac{5}{n}})}=\lim_{n\to+\infty}|\alpha|e^{\frac{5}{n}\log(n)}=|\alpha|e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5\log(n)}{n}}=|\alpha|$$

In base a tale criterio la serie converge se $|\alpha|<1$ e diverge se $|\alpha|>1$. Nel secondo caso nulla possiamo dire sulla serie di partenza. D'altra parte se $|\alpha|>1$ abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}n^5\alpha^n=\begin{cases}+\infty \text{ se } \alpha>1\\ \nexists \text{ se } \alpha<-1\end{cases}$$

Dunque in entrambi casi a_n non è infinitesima e quindi la serie non converge. Infine se $\alpha=1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^5,$$

che ovviamente diverge.

Esercizio 3 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int(x\log(x))^2dx$$

Soluzione: Integriamo per parti con $f(x) = \log^2(x)$ e $g'(x) = x^2$. Dunque si ha: $f'(x) = 2\frac{\log(x)}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int (x\log(x))^2 dx = \int x^2 \log^2(x)dx = \frac{x^3\log^2(x)}{3} - \frac{2}{3}\int x^2\log(x)dx.$$

Operando nuovamente per parti si ha: $f(x) = \log(x)$, $g'(x) = x^2$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi

$$\begin{aligned}\int (x\log(x))^2 dx &= \frac{x^3\log^2(x)}{3} - \int \frac{2}{3}x^2\log(x)dx = \frac{x^3\log^2(x)}{3} - \frac{2}{9}x^3\log(x) + \frac{2}{9}\int x^2 dx \\ &= \frac{x^3\log^2(x)}{3} - \frac{2}{9}x^3\log(x) + \frac{2}{27}x^3 + c\end{aligned}$$

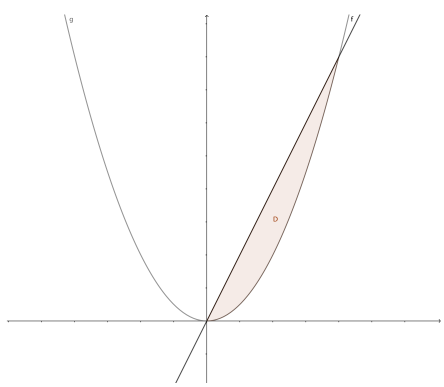
Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int \mathrm{tg}^4\, x dx$$

Soluzione: Operiamo la sostituzione $\mathrm{tg}(x) = t$. Quindi $x = \mathrm{arctg}(t)$, da cui otteniamo $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^4\, x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \frac{t^4+1-1}{1+t^2}dt = \int t^2 - 1dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ = \int t^2 - 1dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg}(t) + c = \frac{\mathrm{tg}(x)^3}{3} - \mathrm{tg}(x) + x + d\end{aligned}$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Calcolare l'area D racchiusa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2x$.



Soluzione: Il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

ha soluzioni $x = 0, y = 0$ e $x = 2, y = 4$. Di conseguenza, l'area D cercata è data da

$$D = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$