PRIMA PROVA INTERMEDIA MATEMATICA I (2018/19) — TRACCIA A

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

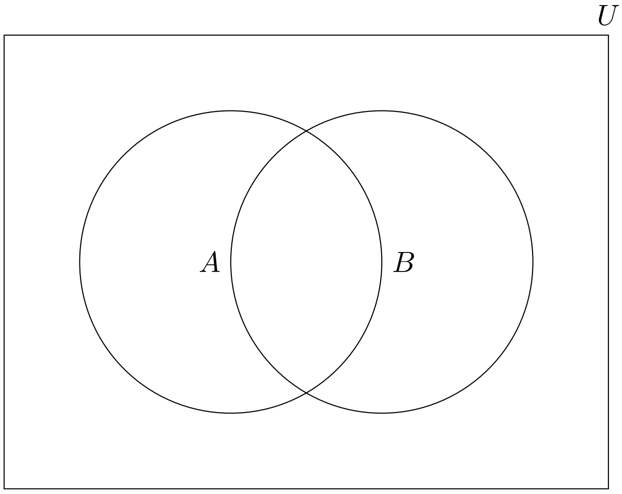
Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

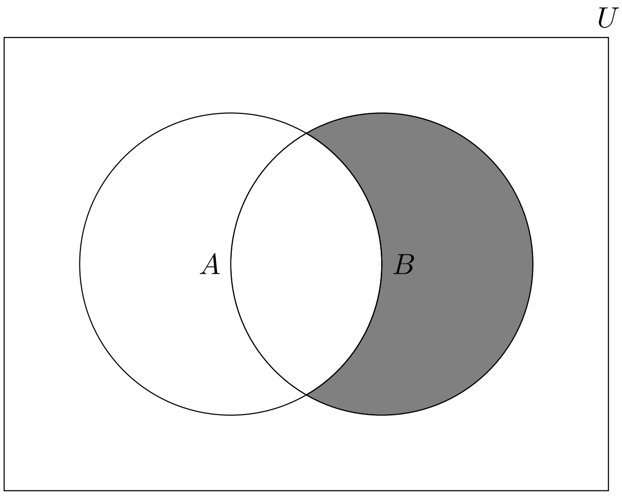
Date: 17/10/18.

Esercizio 1 (3 punti)**.** Colorare il seguente insieme

$$B \cap \big((U \setminus A) \cup (U \setminus B)\big)$$



Soluzione:



Esercizio 2 (6 punti)**.** Dimostrare per induzione che

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soluzione: Per $n = 1$ si ha $1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$, che è ovviamente vero. Ora supponiamo che $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ valga per n e mostriamo che

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \qquad \text{per ipot. ind.}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4))}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ (in forma algebrica) della seguente equazione:

$$iz^2+(1+i)z+1=0$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
z_{1/2} &= \frac{-1-i+\sqrt{(1+i)^2-4i}}{2i} = \frac{-1-i+\sqrt{1+2i-1-4i}}{2i}\\
&= \frac{-1-i+\sqrt{-2i}}{2i}.
\end{aligned}$$

Per calcolare $\sqrt{-2i}$ rappresentiamo $-2i$ in forma trigonometrica. Il modulo $\rho=2$ e l'angolo $\theta=3\pi/2$, quindi

$$\begin{aligned}
\sqrt{-2i} &= \sqrt{2(\cos(3\pi/2)+i\,\mathrm{sen}(3\pi/2))} =\\
&= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\,\mathrm{sen}(3\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}) = -1+i\\ \sqrt{2}(\cos(7\pi/4)+i\,\mathrm{sen}(7\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = 1-i \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque le soluzioni sono $\frac{-1-i-1+i}{2i}=i$ e $\frac{-1-i+1-i}{2i}=1$.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Descrivere il dominio della seguente funzione.

$$f(x)=\frac{\log(\sqrt{x^2+2x}-x-2)}{\mathrm{sen}(x+3)}$$

Soluzione: Dobbiamo imporre:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x}-x-2>0\\ x^2+2x\geq 0\\ x+3\neq k\pi \qquad\qquad \text{con } k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x}>x+2\\ x(x+2)\geq 0\\ x\neq k\pi-3 \qquad\qquad \text{con } k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Quindi $dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2\}\setminus\{k\pi-3\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n+4}$$

Soluzione:

Esercizio 6 (6 punti)**.** Data una successione convergente a_n, supponiamo che esistano infiniti n per cui $a_n \leq 0$ e infiniti n per cui $a_n \geq 0$. Dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Soluzione: Per il teorema della permanenza del segno se a_n convergesse a un $a > 0$ allora da un certo $k \in \mathbb{N}$, $\forall n > k$, $a_n > 0$, ma così non è poiché esistono infiniti n per cui $a_n \leq 0$. Similmente se a_n convergesse a un $a < 0$ allora da un certo$k \in \mathbb{N}$, $\forall n > k$, $a_n < 0$, ma così non è poiché esistono infiniti n per cui $a_n \geq 0$. Dunque il limite può solo essere 0.